

Διάλεξη 22

21/5

Άσκηση 1

Εξετάζουμε επίπεδο στο χώρο της $f(x,y) = x^2 + 3xy$ στο $(1,1,4)$. Σε ποιο σημείο η επιφάνεια στο $(1,1,4)$ έχει εφαπτόμενο επίπεδο $\perp E$;

Θέτω $g(x,y,z) = x^3 + 3y^2 + z^2 = 18$ μεταθερί
Αρα στο τυχαίο σημείο (x,y,z) της S το $\nabla g(\dots)$ είναι κάθετο στην S
Οπότε στο εφαπτόμενο επίπεδο της S .

Έστω $F(x,y,z) = x^2 + 3xy - z$. Το διάνυσμα $\nabla F(1,1,4) \perp E$.
Για να έχω ότι Εφ.επ. $S \parallel E$ πρέπει $\nabla g(x,y,z) \parallel \nabla F(1,1,4)$, άρα $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

τ.ω. $\nabla g(x,y,z) = \lambda \nabla F(1,1,4)$ άρα πρέπει να λύσω:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= 3x^2 = \lambda F_x(1,1,4) \\ g_y &= 6y = \lambda F_y(1,1,4) \\ g_z &= 2z = \lambda F_z(1,1,4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \pm \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \quad (\lambda > 0) \\ y &= \frac{\lambda}{2} \\ z &= -\frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

$\leadsto$ Αντιμεθερίτω το (x,y,z) στην $(1,1,4)$,
βρίσκω λ και το αντικαθιστώ στο x,y,z

(1) $g = 9$

Άσκηση 2

Βρείτε max, min της $f(x,y,z) = (x-1)^4 + (y-1)^4 + (z-1)^4$ με

συνθήκη $g(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 = 48$

$$\left(\begin{aligned} 1 &< (48)^{1/4} \\ \Rightarrow |y| &< (48)^{1/4} \\ 12 &< (48)^{1/4} \end{aligned} \right) \quad \nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \left. \begin{aligned} 4(x-1)^3 &= \lambda 4x^3 \quad (x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0 \text{ αλλιώς αντικαθιστώ}) \\ 4(y-1)^3 &= \lambda 4y^3 \\ 4(z-1)^3 &= \lambda 4z^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow z = x, y = -x \text{ και } 3x^4 = 48 \Rightarrow x = \pm 2 \quad \begin{aligned} (x,y,z) &= (2,-2,2) \\ (x,y,z) &= (-2,2,-2) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} f(2,-2,2) &= 3 \quad \text{ΕΛΑΧΙΣΤΟ} \\ f(-2,2,-2) &= 3 \cdot 81 \quad \text{ΜΕΓΙΣΤΟ} \end{aligned} \right)$$

Άσκηση 3

Αν $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ομαλή τ.ω. $f(x, y, x^2 - y^2) = 0$. Αν $y = y(x) \exists$,

υπολογίστε των $\frac{dy}{dx}$ $D_1 = \frac{\partial f}{\partial u}$ $D_2 = \frac{\partial f}{\partial v}$

Θεωρώ $y = y(x)$ και υπολογίζω
 Για να $\exists$ η $y = y(x)$ σύμφωνα
 το (x_0, y_0) πρέπει να ισχύει
 η συνθήκη:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} f(\overset{u}{x}, \overset{v}{y(x)}, \overset{w}{x^2 - y^2(x)}) =$$

$$= D_1 f \frac{\partial x}{\partial x} + D_2 f \frac{\partial y}{\partial x} + D_3 f (2x - 2y \frac{\partial y}{\partial x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} (D_2 f - 2y D_3 f) = 2x D_3 f - D_1 f \Rightarrow \dots$$

Κάθε παράγωγος ως προς y πρέπει να είναι $\neq 0$ ($\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$)

Από θεώρημα πεπλεγμένης

Αρα $\frac{\partial f}{\partial y} = D_1 f \frac{\partial x}{\partial y} + D_2 f \frac{\partial y}{\partial y} + D_3 \frac{\partial (x^2 - y^2)}{\partial y} = D_2 f - 2y D_3 f \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$