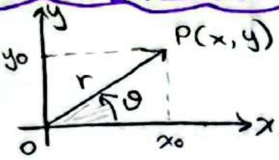
ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ → (r,θ)

στον $\mathbb{R}^2$:



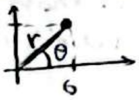
- καρτεσιανές: (x,y)
- πολικές: (r,θ) ⟶ $r\geq 0$ (μήκος), $\theta\in[0,2\pi)$

(μπορώ εύκολα να πηγαίνω από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο)

↳ $r=(x^2+y^2)^{1/2}$, $\theta=\arctan y/x$ ← (όχι ακριβές)

Παράδειγμα 1 (i) Αν $(x,y)=(6,6) \Rightarrow (r,\theta)=?$ (ii) Αν $(r,\theta)=(8,2\pi/3) \Rightarrow (x,y)=?$

(i)



$r=(6^2+6^2)^{1/2}=\underline{6\sqrt{2}}$ (από πυθαγόρειο)

$\arctan\theta=\frac{6}{6}=1$ άρα $\theta=\underline{\pi/4}$ ⟶ $(r,\theta)=(6\sqrt{2},\pi/4)$

(ii) $x=r\cdot\cos\theta$, $y=r\cdot\sin\theta$ άρα $(x,y)=(-4,4\sqrt{3})$

$x=8\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=-4$ $\quad y=8\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=4\sqrt{3}$

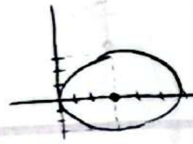
παράδειγμα 2 Τι καμπύλη παριστά η εξίσωση $r=6\cos\theta$; (που μου είναι)

•Θα γράψω την εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες (πιο αναγνωρίσιμο)

$r=6\cdot\cos\theta \Leftrightarrow r^2=6r\cos\theta \Leftrightarrow \underline{x^2+y^2=6x} \Leftrightarrow x^2-6x+9-9+y^2=0 \Leftrightarrow$ (*)

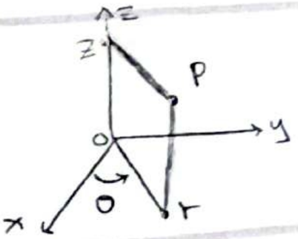
Σ το r είναι πάντα θετικό, οπότε το πολλαπλασιάζω αριστερά και δεξιά αφού θέλω να εμφανίσω το $r\cos\theta=x$

(*) $\Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=9$ που παριστάνει ΚΥΚΛΟ με κέντρο ⟶ $(3,0)$ και ακτίνα ⟶ 3



ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ → (r,θ,z)

στον $\mathbb{R}^3$:

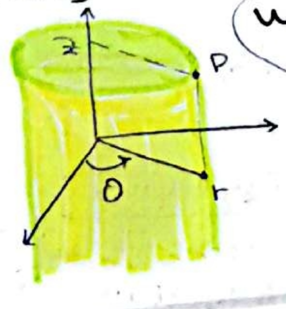


↳ επέκταση πολικών (εξαιρετικά βολικές σε κυλίνδρους)

$r\geq 0$, $\theta\in[0,2\pi)$, $z\in\mathbb{R}$

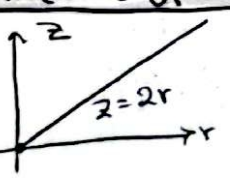
παράδειγμα 3 Τι σχήμα παριστά η εξίσωση $r=r_0$; ← (θ και z όχι να ναι)

⟶ είναι ένας άπειρος κύλινδρος

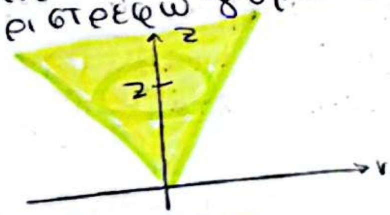


και $\theta=\theta_0$;
↓
ημιεπίπεδο κάθετο στο x y που περιέχει τον άξονα z

παράδειγμα 4 Τι σχήμα παριστά η εξίσωση $z=2r$



⤳ παίρνω αυτό και το περιστρέφω γύρω-γύρω



ΚΩΝΟΣ (κυλινδρικές)

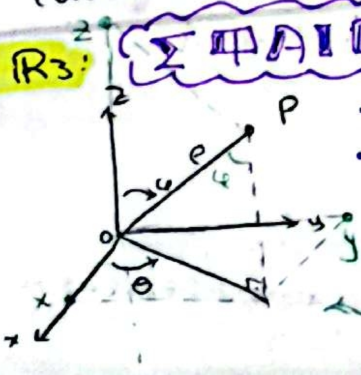
$z=2r \Leftrightarrow z^2=4r^2 \Leftrightarrow \underline{z^2=4(x^2+y^2)}$

(εξίσωση του ίδιου κώνου σε καρτεσιανές)

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ (ρ,φ,θ)

(εξαιρετικά βολικές όταν το χωρίο που με ενδιαφέρει είναι σφαίρα)

στον $\mathbb{R}^3$:



- $\rho\geq 0$
- $\varphi\in[0,\pi]$
- $\theta\in[0,2\pi)$

*εξίσωση σφαίρας ακτίνας R: $\rho=R$

$r=\rho\sin\varphi$
$x=r\cos\theta$

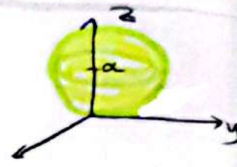
← σχέσεις σφαιρικών – καρτεσιανών

$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$
$y=\rho\sin\varphi\sin\theta$

Παράδειγμα 5 Τι σχήμα είναι το $\varphi=\varphi_0$ (σφαιρικές) (ρ και θ ότι να ναι) → ΚΩΝΟΣ

Γενικά, σχήματα με κυκλική συμμετρία βολεύουν πολύ πολικές/κυλινδρικές/σφαιρικές
(στη θα πάω σε κύβο θα βγει πολύ άσχημο)

Παράδειγμα 6 Τι σχήμα περιγράφει η εξίσωση $\rho = 2\alpha\cos\varphi$;



$$\rho = 2\alpha\cos\varphi \xLeftrightarrow{\text{για να μην μπλέξω με ρίζες}} \rho^2 = 2\alpha\underbrace{\rho\cos\varphi}_{z} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = 2\alpha z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\alpha z+\alpha^2=\alpha^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+(z-\alpha)^2=\alpha^2$$

Σφαίρα με κέντρο $(0,0,\alpha)$ και ακτίνα α

Παράδειγμα 7 Είδαμε ότι σε κυλινδρικές συντεταγμένες η εξίσωση $z=2r$ παριστά κώνο. Πως γράφεται αυτή η εξίσωση σε σφαιρικές;

$$\left.\begin{aligned} z&=\rho\cos\varphi \\ r&=\rho\sin\varphi \end{aligned}\right\} \text{Επομένως } z=2r \Leftrightarrow \rho\cos\varphi = 2\rho\sin\varphi \Leftrightarrow \tan\varphi=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi=\varphi_0$$

όπου $\tan\varphi_0=\frac{1}{2}$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

τέλος συστήματος συντεταγμένων
Σχέδιο κυρίως στον Απ3

Πιο γενική περίπτωση: $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Αν $m=1$: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση n-μεταβλητών
  πχ $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2 \cos x_3$
- Αν $m>1$: $\tilde{f}$ είναι διανυσματική συνάρτηση n-μεταβλητών

$$\tilde{f}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ f_2(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$

Εν γένει
$\tilde{f}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ όπου U πεδίο ορισμού της f

Διάλεξη 4η 26/2

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 2D → $f(x,y)$ ή $f(x_1,x_2)$ 3D → $f(x,y,z)$ ή $f(x_1,x_2,x_3)$

Ορισμός συνόλου στάθμης

Σύνολο στάθμης της f, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$, με τιμή (στάθμης) c είναι το σύνολο των σημείων $\bar{x} \in U$ ($\bar{x}$ διανυσματικό) τ.ω. $f(\bar{x}) = c$

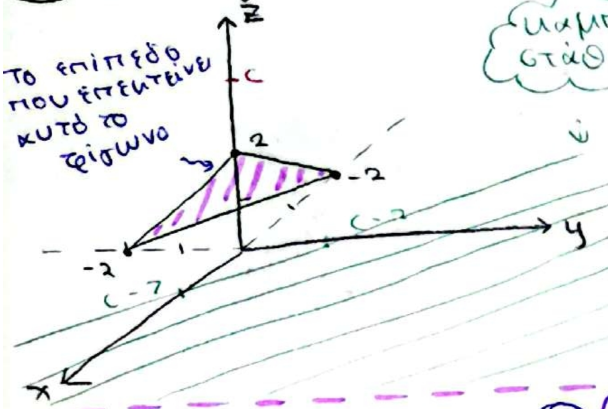
- Αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τότε έχουμε καμπύλη στάθμης
- Αν $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ τότε έχουμε επιφάνεια στάθμης

→ Επιφάνειες που πρέπει να αναγνωρίζουμε άμεσως

(1) Επίπεδο: $Ax + By + Cz = D$ ← η πιο γενική μορφή

↳ το επίπεδο είναι πάντα γραμμική συνάρτηση

πχ $z = f(x,y) = x + y + 2$ • $(x=0, y=0) \to z = 2$ • $(z=0, y=0) \to x = -2$ • $y = -2$



καμπύλες στάθμης: $f(x,y) = c$

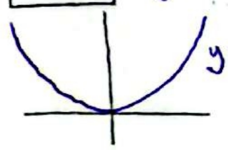
Που τέμνει το επίπεδο $z = c$ το γράφημα (επίσης επίπεδο) την συνάρτηση $z = f(x,y)$;

↳ $x + y = c - 2$ (ευθεία)

• τα x και y που ικανοποιούν την ευθεία είναι σύνολο στάθμης στην τιμή c

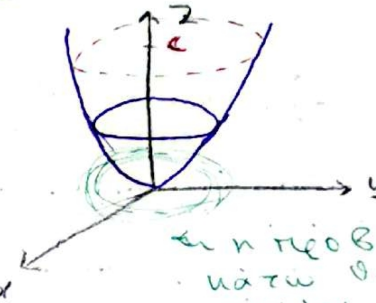
(2) Παραβολή:

Απ1 $y = x^2$



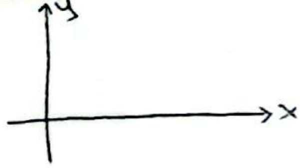
(2D) $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ Παραβολοειδές

το περιστρέφω γύρω-γύρω



← η προβολή κάτω θα είναι κύκλος

καμπύλες στάθμης: $f(x,y) = x^2 + y^2 = c$



• $c < 0$, η καμπύλη στάθμης $= \varnothing$

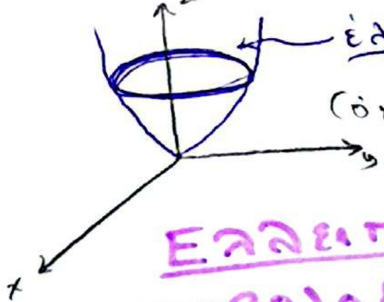
• $c = 0$, η καμπύλη στάθμης $= (0,0)$ ← (εκφυλισμένο)

• $c > 0$, η καμπύλη στάθμης $=$ κύκλος → κέντρο $(0,0)$, → ακτίνα $\sqrt{c}$

→ πιο γενικά μπορώ να έχω:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Οι καμπύλες στάθμης είναι η έλλειψεις $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c > 0$

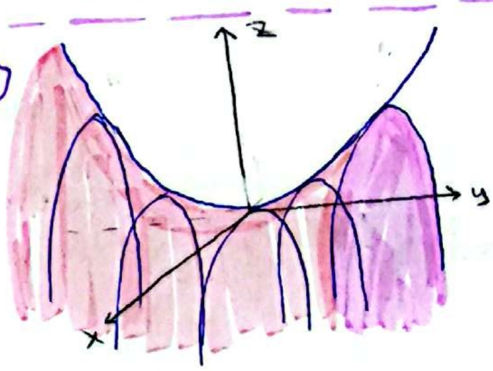


← έλλειψη (όχι τέλειος κύκλος)

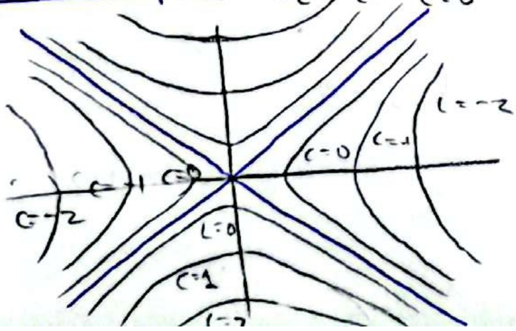
Ελλειπτικό παραβολοειδές

(3) Σάγμα (σαμάρι) $z = y^2 - x^2$

↳ ∄ αντίστοιχο στον Απ1 με 1 μεταβλητή



καμπύλες στάθμης: $y^2 - x^2 = c$



πιο γενικά

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$ (ίδια γεωμετρία)

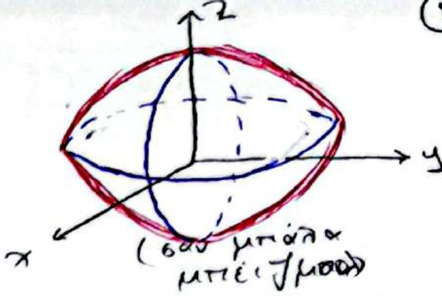
μη συμμετρικό σαμάρι

④ Ελλειψοειδές: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Γενίκευση έλλειψης

(σύνολο στάθμης ⟶ ελλείψεις)

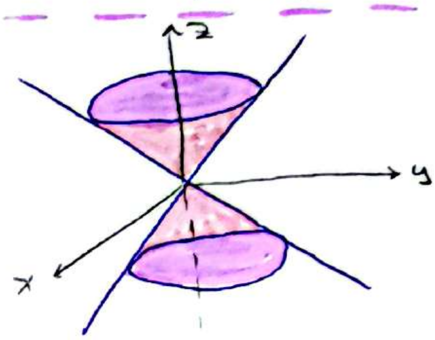
Ειδική περίπτωση ΣΦΑΙΡΑ: $x^2+y^2+z^2=R^2$



⑤ Κυκλικός κώνος: $z^2=x^2+y^2$

Επειδή δεν είναι "ακριβώς συνάρτηση", μπορώ να το χωρίσω σε πάνω: / κάτω:

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, & z>0 \\ z=-\sqrt{x^2+y^2}, & z<0 \end{cases}$$



καμπύλη στάθμης: $z=c \iff \sqrt{x^2+y^2}=c$

- $c<0 \Rightarrow$ καμπύλη στάθμης $=\varnothing$
- $c=0 \Rightarrow$ καμπύλη στάθμης $=(0,0)$
- $c>0 \Rightarrow$ καμπύλη στάθμης C

Παράδειγμα 1 Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, βρείτε τις καμπύλες στάθμης της συνάρτησης: (του trouba)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

→ Γράφω τη συνάρτηση σε πολικές συντ.:

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ } θα γράψω μία συνάρτηση του r και του θ (αντί του x και y)

Έστω $g(r,\theta)=f(x,y)$ (για να μην μπερδεύομαι)

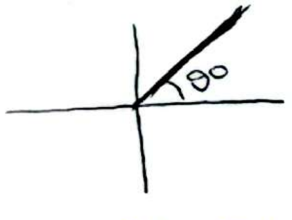
- $x^2+y^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2$
- $2xy=2r^2\sin\theta\cos\theta=r^2\sin2\theta$

Άρα: $g(r,\theta)=\begin{cases}\sin2\theta, & r\neq0\\ 0, & r=0\end{cases}$ } Η άσκηση γίνεται σε πολικές γιατί είναι εξαιρετικά πιο απλή μορφή

καμπύλη στάθμης: $g(r,\theta)=c \iff \sin2\theta=c$ (για $r>0$)

- αν $|c|>1$, η καμπύλη στάθμης $=\varnothing$
- αν $|c|\le1$, τότε $\sin2\theta=c \Rightarrow \theta=\theta_0$ τ.ω. $\sin2\theta_0=c$, η καμπύλη στάθμης είναι η $\theta=\theta_0$

↳ οπότε η καμπύλη στάθμης απ' την



* καμπύλες στάθμης: ευθείες που διέρχονται απ' την αρχή των αξόνων

⟶ Ανάλογα με το πως πλησιάζω την αρχή των αξόνων έχω άλλη τιμή (στις 2 μπορώ με 2 τρόπους $\rightarrow \circ \leftarrow$) φαινόμενο πολλών διαστάσεων

Παράδειγμα 2 Σχεδιάστε πρόχειρα τις καμπύλες στάθμης της $f(x,y)=x^2+xy$, για $c=0,\pm1,\pm2$

$x^2+xy=c$
- $c=0$: $x=0$ ή $x=-y$
- $c\neq0$: $y=\frac{c}{x}-x$ (υπερβολή)

! Οι καμπύλες στάθμης ζουν στον $\mathbb{R}^2$!