ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γενίκευση του ανοιχτού διαστήματος (x_0-r, x_0+r) στη μία διάσταση

Ορισμός ανοιχτής μπάλας

Ανοιχτή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ (δίσκος στον $\mathbb{R}^2$) με κέντρο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και ακτίνα $r>0$. $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-x_0\| < r\}$

Ορισμός κλειστής μπάλας

Κλειστή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ (δίσκος στον $\mathbb{R}^2$) με κέντρο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και ακτίνα $r>0$. $\bar{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-x_0\| \leq r\}$

Ορισμός ανοιχτού συνόλου

Το $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό αν $\forall x_0 \in U \; \exists r>0$ τ.ω. $B_r(x_0) \subset U$

Θεώρημα Η ανοιχτή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό σύνολο

Απόδειξη ← Αναλυσιακή απόδειξη

Έστω $B_r(x_0)$ ανοιχτή μπάλα και $x \in B_r(x_0)$ τυχαίο σημείο.
Συνθήκη για να είναι μέσα η μικρή μπάλα: Επιλέγω $s < r - \|x-x_0\|$ και έστω $B_s(x)$. Θδο $B_s(x) \subset B_r(x_0)$.
Πράγματι, έστω $y \in B_s(x)$, θδο $y \in B_r(x_0)$.

Τριγωνική ανισότητα: $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$\|y-x_0\| \leq \|x-x_0\| + \|y-x\| < \|x-x_0\| + s < \|x-x_0\| + r - \|x-x_0\| = r$

Έδειξα ότι $\|y-x_0\| < r \Rightarrow y \in B_r(x_0)$

(Η απόδειξη είναι απλή αναλυσιακή. Δεν θα ασχοληθούμε πολύ με τέτοιες στο μάθημα. (οι απειροστικοί είναι πιο υπολογιστικοί, δεν έχουν τόσο σχέση με αναλύσεις)

Παρατήρηση: Η κλειστή μπάλα δεν είναι ανοικτό σύνολο

Ορισμός συνοριακού σημείου

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Το $x \in \mathbb{R}^n$ λέγεται συνοριακό σημείο του A αν κάθε μπάλα με κέντρο x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A και τουλάχιστον 1 σημείο που δεν ανήκει στο A.

Ορισμός ορίου Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού $A \subset \mathbb{R}^n$ και έστω x_0 που ανήκει είτε στο A είτε στο σύνορο του A. Τότε:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ανν $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ τ.ω. $0 < \|x-x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$.

Απ1 $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ τ.ω. $0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Το μόνο που αλλάζει είναι ότι το ευκλείδειο μήκος ήταν απόλυτη τιμή

Γενικά: $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (για $m>1$, το $l \in \mathbb{R}^m$ είναι διάνυσμα)

Παράδειγμα 1 Ν.δ.ο. $\lim_{x \to x_0} x = x_0$, για $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ με ορισμό

Τέτοιου είδους αποδείξεις ξεκινάνε πάντα: έστω $\varepsilon > 0$, τυχαίο.
Πρέπει να βρω $\delta > 0$ τ.ω. $0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|\underset{f(x)}{x} - \underset{\ell}{x_0}\| < \varepsilon$

Μπορώ να επιλέξω $\delta = \varepsilon$ ή οτιδήποτε θετικό και μικρότερο από ε.

Παράδειγμα 2 Στο $\mathbb{R}^2$, $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} x = x_0$. Ν.δ.ο. με ορισμό
Έστω $\varepsilon > 0$, θα βρω $\delta > 0$ τ.ω. για $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$
Ξανά $\delta = \varepsilon$ ή μικρότερο (θετικό πάντα). Διότι:
$|x - x_0| = ((x-x_0)^2)^{1/2} \leq ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^{1/2} < \varepsilon$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ

① Το όριο όταν $\exists$ είναι μοναδικό
② Αν $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$:

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (cf(x)) = c\ell, c \in \mathbb{R}$

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \overset{①}{\Rightarrow} \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$

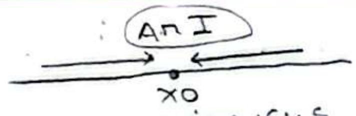
$\overset{②}{\Rightarrow} \lim_{x \to x_0} (fg)(x) = \ell_1 \ell_2$

③ $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f/g)(x) = \ell_1/\ell_2$ εφόσον $\ell_2 \neq 0$

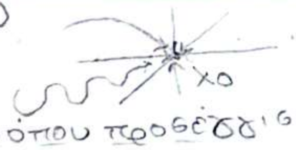
Παράδειγμα 3 Βρες $\lim_{(x,y) \to (1,2)} [(3x^2 + y^2 + 2)/(x^4 + y^4)]$

Έχω παράλληλη εφαρμογή ιδιοτήτων
$$\lim_{(x,y) \to (1,2)} \left(\frac{3x^2 + y^2 + 2}{x^4 + y^4}\right) = \frac{3 \cdot 1^2 + 2^2 + 2}{1^4 + 2^4} = \frac{7}{17}$$

Θεώρημα παρεμβολής Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g \leq f \leq h$ $\forall x$ στο πεδίο ορισμού. Αν $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell = \lim_{x \to x_0} h(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$



2 τρόποι προσέγγισης



από όλες τις κατευθύνσεις, και ούτε καν αναγκαστικά ευθείες

∞ τρόποι προσέγγισης

Παράδειγμα 4 Ελέγξτε το όριο $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$

πεδίο ορισμού: Όλο το $\mathbb{R}^2$ εκτός αρχή αξόνων $\rightsquigarrow$ το $(0,0)$ είναι στο σύνορο του π.ο.

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής και όλο το όριο πάει στο 0