Ορισμός συνέχειας σε σημείο του πεδίου ορισμού

Η $\bar{f}: A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής στο $x_0\in A$ εφόσον $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Ορισμός συνέχειας στο π.ο.

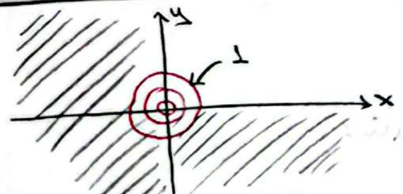
Η $\bar{f}: A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x\in A$

Παράδειγμα 1 $f(x,y)=x^2+y^2+xy$, $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(x^2+y^2+xy)=x_0^2+y_0^2+x_0y_0=f(x_0,y_0)$ ⇝ Άρα η f είναι συνεχής στο (x_0,y_0) τυχαίο, άρα είναι και σε όλο το $\mathbb{R}^2$

Παράδειγμα 2 $f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\le 0 \text{ ή } y\le 0\\ 0, & \text{αν } x>0 \text{ και } y>0\end{cases}$ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

Είναι η f συνεχής στο (0,0)?



⇝ Είναι η f συνεχής (σημείο αλλαγής κλάδου)

$f(0,0)=1$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0\neq 1=f(0,0)$ για $x>0, y>0$

Αν πάρω δίσκο ($\to\mathbb{R}^2$) στο (0,0) μπορώ να βρω τιμές της συνάρτησης που είναι 0 και άλλες 1, όσο μικρή και να είναι η ακτίνα ($\varepsilon\to 0$)

Πρόταση Έστω συναρτήσεις $f,g: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

(i) f συνεχής στο $x_0\in A$ ανν cf συνεχής στο x_0 ($\forall c\in\mathbb{R}$)

(ii) f, g συνεχής στο $x_0\in A$ ανν $f\pm g$, fg, $\frac{g}{f}$ ($f\neq 0$ στο x_0) συνεχής

(iii) $\bar{f}: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Η $\bar{f}$ είναι συνεχής στο $x_0\in A$ <=> f_i συνεχής στο x_0 $\forall i=1,\dots,m$ ($\bar{f}=(f_1,f_2,\dots,f_m)$)

Θεώρημα (γνωστή ιδιότητα, γνωστή από ΑπΙ)

$$A\subset\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} B\subset\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} C\subset\mathbb{R}^p \qquad f\circ g: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$$

Έχω 2 συναρτήσεις $g: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $f: B\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$

(i) Αν $g(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} y_0$ και $f(y)\xrightarrow[y\to y_0]{}\ell$ τότε:

$$\lim_{x\to x_0}(f\circ g)(x)=\lim_{y\to y_0}f(y)=\ell$$

(ii) Αν g συνεχής στο $x_0\in A$ και f συνεχής στο $y_0=g(x_0)\in B$ τότε η $(f\circ g)$ συνεχής στο x_0

πάνω είναι σαν να γράφω $x_1, x_2, \dots$ $y_1, y_2, \dots$ όταν λέω x και y

Εδώ είναι σαν να γράφω x_1, x_2

No connection

(Η απόδειξη παραδόξως δεν είναι τόσο απλή (δεν θα την κάνουμε)

Παράδειγμα 3 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\right]$ ⇝ $g(x,y)=xy$, $f(u)=\sin(u)/u$

- $\lim_{u\to 0}f(u)=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=0$ (y_0 του θεωρήματος)

∃ τα όρια χρησιμοποιώ σύνθεση!

Άρα $\frac{\sin(xy)}{xy}=(f\circ g)(x,y)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\frac{\sin(xy)}{x\cdot y}\right]=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$

Παράδειγμα 4 $f(x,y)=e^{\sin(x^2+y^2)}$ είναι συνεχής;

↳ e^z, $z=\sin(x^2+y^2)$
  ↳ $\sin u$, $u=x^2+y^2$

} έχω 3 "τέλειες" συναρτήσεις, γνωστές • e^x • $\sin x$ • x^2+y^2 και οι 3 συνεχείς

Άρα και η $f(x,y)$ είναι συνεχής $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ ως σύνθεση συνεχών

Παράδειγμα 5 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ είναι η f συνεχής;
↳ π.ο. όλο το $\mathbb{R}^2$

Εύκολα παρατηρώ ότι f συνεχής στο $\mathbb{R}^2/(0,0)$. Μένει νδο είναι στο 0

Από θεώρημα παρεμβολής $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

$$\boxed{0\leq f(x,y)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0}$$

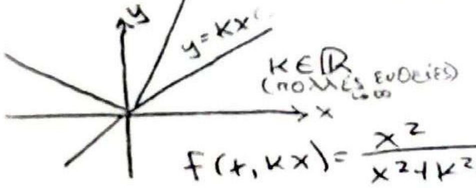
Άρα συνεχής στο $\mathbb{R}^2$

SOS

Παράδειγμα 6 $\exists$ το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right]$;
$f(x,y)$

$0\leq f(x,y)\leq\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1$ ⟵ δεν μπορώ να πω κάτι, $f(x,y)\in[0,1]$

Τι κάνω; 💡 Ας προσεγγίσω το $(0,0)$ κατά μήκος ευθειών
Ας προσεγγίσω το (0,0) κατά μήκος ευθειών που μου δίνουν άλλο όριο, $\nexists$
↳ Αν βρω 2 ευθείες που μου δίνουν άλλο όριο, $\nexists$
↳ Αν δεν βρω, δεν ξέρω ($\exists$ άπειρες)



Γενικά αυτή τη διαδικασία την κάνω για νδο $\nexists$ ⟶ Άρα όριο $\nexists$

$f(x,kx)=\dfrac{x^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{x^2}{x^2(1+k^2)}=\dfrac{1}{1+k^2}$ εξαρτώμενο του κ) $\lim\limits_{x\to0}(x,kx)=\dfrac{1}{1+k^2}$

Άρα παίρνω διαφορετικές τιμές

Παράδειγμα 7 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right]$ → σύ-νθε-ση

$z=x^2+y^2$, $\dfrac{\sin z}{z}$

$(x,y)\to(0,0)\Rightarrow z\to0$, $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\sin z}{z}=1$

Άρα {σύνθεση + Απ1} ⟶ $\exists$ το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right]=1$

Παράδειγμα 8 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[\dfrac{|x|^{3/2}+|y|^{3/2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$ ⇝ Διαισθητικά, ο αριθμητής πάει πιο γρήγορα στο 0 (λόγω δύναμης)

Χρησιμοποιώ ΠΟΛΙΚΕΣ ⇝ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ και $(x,y)\to0 \iff r\to0$

$$g(r,\theta)=f(x,y)=\frac{r^{3/2}|\cos\theta|^{3/2}+r^{3/2}|\sin\theta|^{3/2}}{r}=\sqrt{r}\,\underbrace{(|\cos\theta|^{3/2}+|\sin\theta|^{3/2})}_{\text{φραγμένο}}$$

Άρα έχω $0\leq\sqrt{r}\,(|\cos\theta|^{3/2}+|\sin\theta|^{3/2})<2r^{1/2}\to0$, από ΚΠ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$

(το θ ας είναι ότι είναι δεν με νοιάζει) ⟵ σε αυτό το πχ

↳ **πρόβλημα** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right)$ γίνεται $\dfrac{r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}$

ύποπτος παρονομαστής, δεν δουλεύει η διαίσθηση

ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

↳ Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (δηλ. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$). Μερική παράγωγος της f ως προς x_j:

$$\frac{df}{dx_j} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\dots,x_j+h,\dots,x_n)}{h} - \frac{f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h\bar{e}_j)-f(x)}{h}$$

όπου • $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$ • $\bar{e}_j=(0,\dots,\underset{\uparrow\ j\ \text{θέση}}{1},\dots,0)$

παράδειγμα 1 • $f(x,y)=x^2y+y^3 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+3y^2$

• $f(x,y)=x\cos y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=\cos y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-x\sin y$

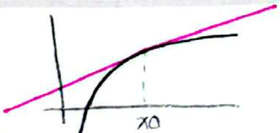
• $f(x,y)=x^{1/3}y^{1/3}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=?\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{3}x^{-2/3}y^{1/3}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ δεν ορίζεται

Χρησιμοποιώ τον ορισμό: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$

• $f(x,y)=\begin{cases}1 & x\le 0 \text{ ή } y\le 0\\ 0 & \text{αλλιώς}\end{cases}$ $\to \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ (διότι $f(x,0)=1$), $\to \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

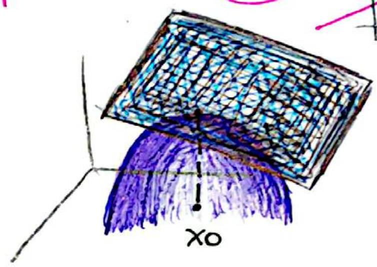
Δηλ. ∃ 2 μερικές παράγωγοι της f στο (0,0) αλλά η f δεν είναι συνεχής

Υπενθύμιση από Απ1



παραγωγίσιμη στο xo <=> <=> ∃ εφαπτόμενη ευθεία στο xo

Απ2



παραγωγίσιμη στο xo <=> <=> ∃ εφαπτόμενο επίπεδο στο xo

? Αν το γράφημα της $f(x,y)$ στο (x_0,y_0) έχει εφαπτόμενο επίπεδο, ποια είναι η εξίσωσή του;

↳ Τέμνω το γράφημα με επίπεδο παράλληλο στο yz και περιέχει το σημείο. Έστω $f(x_0,y)$ η καμπύλη της τομής. Η εφαπτομένη στην καμπύλη $f(x_0,y)$ ανήκει στο προηγούμενο επίπεδο. Η κλίση $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ (διανύσματα των επιπέδων) $\vec{v}=\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\vec{k}$ και $\vec{u}=\vec{i}+\frac{df}{dx}(x_0,y_0)\vec{u}$

Άρα το επίπεδο που ψάχνω είναι κάθετο $\perp \underbrace{\vec{u}\times\vec{v}}$ $\left[\,//\ \frac{df}{dx}(x_0,y_0), \frac{df}{dy}(x_0,y_0)\right]$ και περιέχει το σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου που ψάχνω είναι:

. . πράξεις . . . Η εξίσωση $z=f(x_0,y_0)+\frac{df}{dx}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{df}{dy}(x_0,y_0)(y-y_0)$

πρόταση Αν $f(x,y)$ εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ η εξίσωσή του είναι $z=f(x_0,y_0)+\frac{df}{dx}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{df}{dy}(x_0,y_0)(y-y_0)$