Διάλεξη 8 17/3

→ Ορίσαμε μερική παράγωγο, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ή $\frac{\partial f}{\partial y}$ $(f = f(x,y))$

→ Ύπαρξη μερικών παραγώγων $\boxed{\text{δεν σημαίνει ότι}}$ η f είναι ομαλή (πχ μπορεί να μην είναι συνεχής)

Πότε η f(x,y) είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x0,y0)?

Όταν στο σημείο (x0,y0) ∃ εφαπτόμενο (στο γράφημα) επίπεδο!

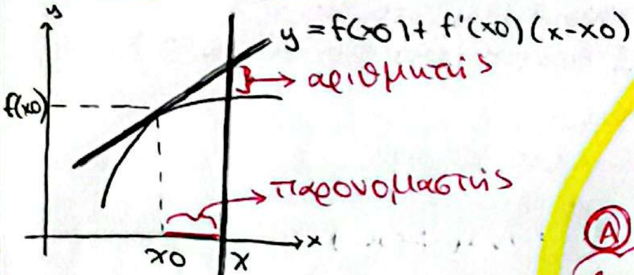
↳ Δείξαμε ότι αν f(x,y) έχει εφαπτόμενο επίπεδο στο (x0,y0) τότε η εξίσωση των εφαπτόμενων επιπέδων είναι:

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Απ I → $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \iff \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0}$$

μπορώ να πω ότι αν το όριο αυτό ∃ και κάνει 0, τότε f παρ/μη με παράγωγο αυτό το όριο

Παρατηρώ ότι:
$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$
εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας



Ορισμός παραγωγισιμότητας στο (x0,y0)

Η f(x,y) είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x0,y0) εφόσον οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ στο (x0,y0)

(A) ∃ και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}$$

Θέλω ύπαρξη μερικών παραγώγων αλλά δεν είναι αρκετό

Σε αυτή τη περίπτωση η f έχει εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο (x0, y0, f(x0,y0)) και η εξίσωση του δίνεται από τη σχέση:

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Παράδειγμα 1

Είναι παραγωγίσιμη η f στο (0,0)?

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y)=(0,0) \\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Πρώτος έλεγχος: Μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \text{ (παρόμοια με πάνω)}$$

Ελέγχω το όριο (A):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 - 0\cdot(x-x_0) - 0(y-y_0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

?

$$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0 \text{ από ΚΠ}$$

$$\left(0 \le \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^3} \le r \to 0\right)$$

Άρα η f παραγωγίσιμη στο (0,0)

παράδειγμα 2 είναι η f παραγωγίσιμη στο (0,0);

$f(x,y)=x^{1/3}y^{1/3}$ ⇝ εύκολα βλέπουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Διαισθητικά ∄ γιατί ο παρονομαστής πάει πιο γρήγορα (θεωρώ πολικές)

Ελέγχω το όριο (A):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x^{1/3}y^{1/3}-0-0(x-x_0)-0(y-y_0)|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x^{1/3}y^{1/3}|}{\sqrt{x^2+y^2}}\overset{?}{=}0$$

Σε πολικές: $$\frac{|x^{1/3}y^{1/3}|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{r^{2/3}|\cos\theta|^{1/3}|\sin\theta|^{1/3}}{r}\geq r^{-1/3}|\cos\theta|^{1/3}|\sin\theta|^{1/3}\xrightarrow[r\to0]{}+\infty$$

άρα το όριο (στην (A)) ∄

Γενικός ορισμός παραγωγισιμότητας σε σημείο

$\bar f: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Η $\bar f$ λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\bar{x}_0\in U$ αν ∃ όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ (όπου $\bar f=\begin{bmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_m\end{bmatrix}$ και $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$)

και αν T ο πίνακας με στοιχεία $t_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ (όλες οι μερικές παράγωγοι)

τότε $$\lim_{\bar x\to\bar x_0}\frac{\|\bar f(\bar x)-\bar f(\bar x_0)-T(\bar x-\bar x_0)\|}{\|\bar x-\bar x_0\|}=0.$$ Η παράγωγός της είναι ο πίνακας T (m×n)

Συμβολισμός: $D\bar f(x_0)=T$ — "Η γραμμική συνάρτηση που προσεγγίζει καλά την συνάρτησή μου στο σημείο τώρα είναι πίνακας"

* πίνακας

Πιο συχνές σε ασκήσεις είναι οι πραγματικές (όχι διανυσματικές) συναρτήσεις $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, Df είναι ο πίνακας γραμμή $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$

Συμβολισμός ∇f: διάνυσμα $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

ΑΝΑΔΕΛΤΑ *

* Λεπτή διαφορά, δεν έχει πολύ βάθος: $\nabla f(h)=\nabla f\cdot h$ $(h\in\mathbb{R}^n)$

Και τα 2 έχουν προϋπόθεση ότι η f είναι παραγωγίσιμη

ΜΙΚΡΗ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΥΛΑ

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ ← με τέτοιες συναρτήσεις ορίζω καμπύλες στον $\mathbb{R}^3$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^n$

είναι ο πιο άμεσος τρόπος να περιγράψεις καμπύλες

= μία απεικόνιση $\bar\sigma:[\alpha,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ (μπορεί να 'ναι και ανοιχτό)

$$\bar\sigma(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))$$

Παραδείγματα

(I) Ευθεία στον $\mathbb{R}^n$ που περνάει από $\overline{x_0}=(x_{01},\dots,x_{0n})$ // στο $\overline{v}$

$l(t)=\overline{x_0}+t\overline{v}=(x_{01}+tv_1, x_{02}+tv_2,\dots, x_{0n}+tv_n)$

↑ παραμετρική αναπαράσταση ευθείας στον $\mathbb{R}^n$

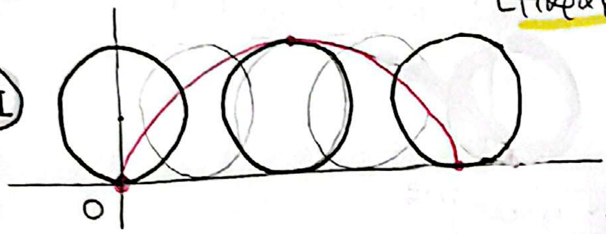
(II) Κύκλος στον $\mathbb{R}^n$ $\quad \overline{\sigma}(t)=(\cos t, \sin t)$, $0\le t<2\pi$

↑ παραμετρική αναπαράσταση κύκλου στον $\mathbb{R}^n$

(III) Παραβολή στον $\mathbb{R}^2$ $\quad \sigma(t)=(t,t^2)$, $t\in\mathbb{R}$

↑ παραμετρική αναπαράσταση παραβολής στον $\mathbb{R}^2$

(IV)



κυκλοειδής καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$

$\overline{\sigma}(t)=(t-\sin t, 1-\cos t)$

↑ παραμετρική αναπαράσταση κυκλοειδής καμπύλης στον $\mathbb{R}^2$

$\overline{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$. Αν $\overline{f}$ παραγωγίσιμη τότε $D\overline{f}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}\\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x}\end{bmatrix}$ πίνακας-στήλη.

Έστω η καμπύλη $\overline{\sigma}(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$

↑ το σκέφτομαι σαν χρόνο

$\overline{\sigma}'(t)=(x'(t), x_2'(t), x_3'(t))$ ← διάνυσμα

$\overline{\sigma}'(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\overline{\sigma}(t_0+h)-\overline{\sigma}(t_0)}{h}$ ← στιγμιαία ταχύτητα την χρονική στιγμή t_0 !

ΘΑΥΜΑΣΙΑ ΦΥΣΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ

Διάλεξη 9 19/3

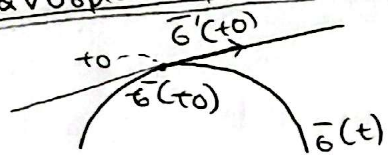
Παραδείγματα → Διανυσματικών συναρτήσεων: Καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$

$\overline{\sigma}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $\overline{\sigma}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

$\overline{\sigma}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$

διάνυσμα ταχύτητας, εφαπτόμενο στην καμπύλη

Εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας όπου $t=t_0$



Γνωρίζω ένα σημείο το $\overline{\sigma}(t_0)$ και είναι // στο $\sigma'(t_0)$

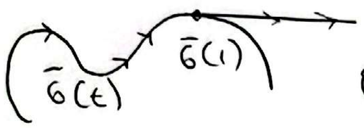
$\overline{l}(\lambda)=\overline{\sigma}(t_0)+\lambda\,\overline{\sigma}'(t_0)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Μπορώ να χρησιμοποιήσω την ίδια παράμετρο t, οπότε έχω:

$\overline{l}(t)=\overline{\sigma}(t_0)+(t-t_0)\,\overline{\sigma}'(t_0)$ ώστε $\overline{l}(t_0)=\overline{\sigma}(t_0)$

Παράδειγμα 1. Κινητό ακολουθεί την καμπύλη $\bar{\sigma}(t)=(e^t, e^{-t}, \cos t)$ και την εγκαταλείπει εφαπτομενικά την χρονική στιγμή $t=1$. Πού βρίσκεται όταν $t=2$?

Από $t\geq 1$ το κινητό ακολουθεί την εφαπτόμενη ευθεία ($t_0=1$).



$\bar{l}(t)=\bar{\sigma}(1)+(t-1)\sigma'(1)$, άρα για $t=2$, η

Θέση του κινητού είναι: $\bar{l}(2)=\bar{\sigma}(1)+\sigma'(1)=$

$=(e, e^{-1}, \cos 1)+(e, -e^{-1}, -\sin 1)=(2e, 0, \cos 1-\sin 1)$

3 ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Θεώρημα 1 Αν $\bar{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ παραγωγίσιμη στο $\bar{x}_0$ τότε είναι και συνεχής στο $\bar{x}_0$.

Θεώρημα 2 $\bar{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Αν όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς σε μια μπάλα γύρω από το $\bar{x}_0$, τότε η $\bar{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\bar{x}_0$ (όχι ανν)

Παράδειγμα 2 $f(x,y)=x^2y+e^{xy}$

$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+xe^{xy}$ ⇝ Από ιδιότητες συνεχών, είναι παντού ($\mathbb{R}^2$) συνεχείς οι μερικές παράγωγοι

★ Άρα η f είναι σε όλο το $\mathbb{R}^2$ παραγωγίσιμη

Θεώρημα 3 $\bar{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $\bar{f}=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ παραγωγίσιμη $\Leftrightarrow$ f_i παρ/μες $\forall i=1,\dots,m$

Το 2ο δουλεύει για οποιαδήποτε «όμορφη» ✦ συνάρτηση

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

(i) $\bar{f},\bar{g}:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ παραγωγίσιμες στο $\bar{x}_0\in U \Rightarrow c\bar{f}, \bar{f}\pm\bar{g}$ παραγωγίσιμες στο $\bar{x}_0$ ($D(f\pm g)=Df\pm Dg$)

(ii) $f,g:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Αν f,g παραγωγίσιμες στο $\bar{x}_0$, τότε fg, f/g ($g(\bar{x}_0)\neq 0$) είναι παραγωγίσιμες στο $\bar{x}_0$ και:

$D(fg)=Df\cdot g+f\cdot Dg$, $D(f/g)=\frac{Df\,g-f\,Dg}{g^2(\bar{x}_0)}$

Παράδειγμα 3 $h(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+1}$

$Dh=\frac{D(x^2+y^2+z^2)(x^2-1)-D(x^2+1)(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{[2x,2y,2z](x^2+1)-[2x,0,0](x^2+y^2+z^2)}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{[2x-2xy^2-2xz^2, 2y(x^2+1), 2z(x^2+1)]}{(x^2+1)^2}$

Θεώρημα

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ

$\bar{g}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\bar{f}: V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

$$\begin{tikzcd} U \subset \mathbb{R}^n \ (\bar{x_0}) \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[rr, bend right, "\bar{f}\circ\bar{g}"'] & V \subset \mathbb{R}^m \ (\bar{y_0}=\bar{g}(\bar{x_0})) \arrow[r, "\bar{f}"] & C \subset \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

Η $\bar{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\bar{x_0}$ και η $\bar{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\bar{y_0} = \bar{g}(\bar{x_0})$. Τότε η σύνθεση $\bar{f}\circ\bar{g} = \bar{f}(\bar{g}(\bar{x}))$ είναι παραγωγίσιμη στο $\bar{x_0}$ και

$D(f\circ g)(x_0) = Df(y_0)\,Dg(x_0)$ ← $\bar{f}\circ\bar{g}$ ∇ γινόμενο πινάκων ∇

Παράδειγμα 4 $\bar{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\bar{\sigma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ δηδ $f(x,y,z)$

$h(t) = f(\bar{\sigma}(t))$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ← συνάρτηση 1ας μεταβλητής!

↳ $h(t) = f(\bar{\sigma}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$

Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της h ως προς t;

↳ Ποια είναι η παράγωγος της h ως προς t; → $\frac{dh}{dt}$ είναι σωστό αφού είναι 1ας μεταβλητής

$$\frac{dh}{dt} = \underset{\text{πίνακας γραμμή}}{Df} \cdot \underset{\text{πίνακας στήλη}}{D\bar{\sigma}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] \cdot \begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

άρα
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

(Απ II)

(Απ I) $\frac{d}{dt} f(x(t)) = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$

Αφού έχω 3 μεταβλητές, η μεταβολή του t επιφέρει 3 τόπους αλλαγές. Τις προσθέτω

Παράδειγμα 5 $f(u,v,w) = u^2 + v^2 - w = h(x,y,z)$. $\frac{\partial h}{\partial x} = ?$

$u(x,y,z) = x^2 y$

$v(x,y,z) = y^2$

$w(x,y,z) = e^{-xz}$

Μπορώ να πάω όπως πριν (θα βρω και τις άλλες μερικές παραγώγους αν και δεν τις θέλω)

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx} =$$
$$= 2u \cdot 2x + 2v \cdot 0 + (-1)\cdot(-z e^{-xz}) =$$
$$= 2x^2 y \cdot 2x + z e^{-xz} = 4x^3 y + z e^{-xz}$$

Παράδειγμα 6 $\frac{\partial}{\partial x} g\left(\frac{x+y}{xy}\right) = ?$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(u)$, $u(x,y) = \frac{x+y}{xy}$, $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$h(x,y) = g(u(x,y))$, $\frac{\partial f}{\partial x} = g'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} =$ ← Με απλές σκέψεις (απέφυγα να πάω σε πίνακες)

$= g'(u)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = g'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$