Διάλεξη 10 | 24/3

Παράδειγμα 7 $h(x,y)=f(x,u(x,y))$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$\frac{\partial h}{\partial x}=?$ (σαν να αθροίζω 2 κανόνες αλυσίδας του ΑπΙ)

Χρήσιμος συμβολισμός: $D_1 F$ ← μερική παράγωγος f ως προς την 1η μεταβλητή

Άρα: $\frac{\partial h}{\partial x}=D_1 f\,\frac{dx}{dx}+D_2 f\,\frac{\partial u}{\partial x}=D_1 f+D_2 f\,\frac{\partial u}{\partial x}$

[Αν δεν έβαζα $D_1 f$ θα έβαζα $\frac{\partial f}{\partial x}(x,u(x,y))=?$
Δεν είναι ξεκάθαρο τι σημαίνει (θεωρώ το $u(x,y)$? (i) Αν $u(x,y)$ δεν είναι σταθερό? (ii)
(i) $D_1 f$ (ii) $\frac{\partial h}{\partial x}$ → Δημιουργεί σύγχυση (Προσοχή στο τι γράφω)]

Δυσκολούτσικο

Παράδειγμα 8 $F(x,z)=\int_0^z f(x,y)\,dy$, $h(x)=F(x,x)$, $dh/dx=?$

↑ είναι 2 μεταβλητών ↑ 1 μεταβλητή

$h(x)=\int_0^x f(x,y)\,dy$, Σκέφτομαι ότι $h(x)=F(x,z(x))$ άρα

$$\frac{dh}{dx}=\frac{d}{dx}F(x,z(x))\Big|_{z(x)=x}=D_1F\,\frac{dx}{dx}+D_2F\,\frac{dz(x)}{dx}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^z f(x,y)\,dy+\frac{\partial}{\partial z}\int_0^z f(x,y)\,dy\Big|_{z(x)=x}=$$

$$=\int_0^z \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy+f(x,x)$$

(Μπορώ να υπολογίσω και με ορισμό παραγώγου)

ΚΑΝΟΝΑΣ LEIBNIZ

Παράδειγμα 9 $g(x,y)=(x^2+1,y^2)$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$f(u,v)=(u+v,u,v^2)$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

Βρείτε: (i) $(f\circ g)(x,y)=?$ (ii) $D(f\circ g)(1,1)=?$

(i) $f\circ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $(f\circ g)(x,y)=(x^2+y^2+1,\,x^2+1,\,y^4)$

→ Μου λέει να βρω παράγωγο, άρα ψάχνω πίνακα

(ii) 1ος τρόπος → Υπολογίζω κατευθείαν τον πίνακα μερικών παραγώγων

$$D(f\circ g)(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial(x^2+y^2+1)}{\partial x} & \frac{\partial(x^2+y^2+1)}{\partial y}\\ \frac{\partial(x^2+1)}{\partial x} & \frac{\partial(x^2+1)}{\partial y}\\ \frac{\partial y^4}{\partial x} & \frac{\partial y^4}{\partial y}\end{bmatrix}=$$

← εννοούνται οι προϋποθέσεις περί συνέχειας και ύπαρξης μερικών παραγώγων (καλές συναρτήσεις)

$$=\begin{bmatrix}2x & 2y\\ 2x & 0\\ 0 & 4y^3\end{bmatrix}.\ \text{Άρα } D(f\circ g)(1,1)=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

2ος τρόπος → με κανόνα αλυσίδας

$$D(f\circ g)(1,1) = Df(g(1,1))\cdot Dg(1,1) = Df(2,1)\cdot Dg(1,1) =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{} \begin{matrix} \leftarrow \left[\frac{\partial(u+v)}{\partial u}, \frac{\partial(u+v)}{\partial v}\right] \\ \\ \\ \end{matrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{} \begin{matrix} \leftarrow \left[\frac{\partial(x^2+1)}{\partial x}, \frac{\partial(x^2+1)}{\partial y}\right]\Big|_{(x,y)=(1,1)} \\ \leftarrow \left[\frac{\partial y^2}{\partial x}, \frac{\partial y^2}{\partial y}\right]\Big|_{(x,y)=(1,1)} \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$ (πιο μπακαλίδικος τρόπος)

ΚΛΙΣΗ (gradient) και ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ κατά ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

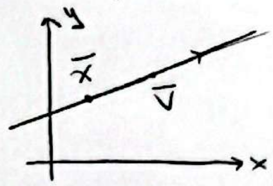
- διάνυσμα με συνιστώσες τις μερικές παραγώγους
- δουλεύει για παραγωγίσιμη συνάρτηση
- έχει εντυπωσιακές ιδιότητες παρόλο που είναι εύκολη έννοια

Ορισμός C^1 Μια συνάρτηση f είναι C^1 αν έχει όλες τις μερικές παραγώγους και είναι συνεχείς (συνεπώς η f είναι παρ/μη)

Ορισμός gradient Αν f είναι $C^1(U)$ όπου $U\subset\mathbb{R}^3$ τότε ∇f η

$$\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Μπορώ να παραγωγίσω σε τυχαία κατεύθυνση οποιασδήποτε ευθείας; (όχι μόνο ως προς άξονες)



$$\bar{l}(t) = \bar{x} + t\bar{v}, \quad t\in\mathbb{R}$$

Ορισμός παραγώγου κατά κατεύθυνση

Αν $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ η παράγωγος της f στο σημείο $\bar{x}$ στην κατεύθυνση $\vec{v}$ ορίζεται: $\frac{d}{dt} f(\bar{x}+t\bar{v})\Big|_{t=0}$

Έχουμε δει: $\bar{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ αν f παρ/μη

$$\frac{d}{dt} f(\bar{c}(t)) = \frac{d}{dt} f(x(t),y(t),z(t)) = \frac{df}{dx}x'(t) + \frac{df}{dy}y'(t) + \frac{df}{dz}z'(t)$$

Άρα έχω $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \frac{d}{dt} f(\bar{x}+t\bar{v})\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}+t\bar{v})\cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} z'(t)\Big|_{t=0} =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x})v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x})\cdot v_3 = \nabla f\cdot\bar{v}$$ ισχύει γενικά

όπου $\bar{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

και $\begin{cases} x(t) = x+tv_1 \\ y(t) = y+tv_2 \\ z(t) = z+tv_3 \end{cases} \left[\begin{matrix} \bar{x} = (x,y,z) \\ \bar{v} = (v_1,v_2,v_3) \end{matrix}\right]$

↑Λεπτό σημείο

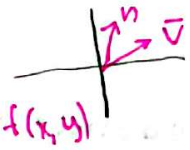
παίρνω χρήσιμες πληροφορίες για μοναδιαίο $\bar{v}$, παρόλο που ο ορισμός δεν το απαιτεί

$\|\bar{v}\| = 1$

παρατηρήσεις:

• Ο υπολογισμός της κατά κατεύθυνση παραγώγου είναι απλός αν ξέρω κλίση (gradient)

• Έχω συνάρτηση 2 μεταβλητών $f(x,y)$ C^1. Αφού είναι C^1 η κλίση της είναι καλά ορισμένη ($\exists \nabla f$).



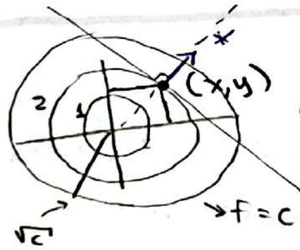
ρυθμός αλλαγής κατεύθυνσης $\rightsquigarrow \nabla f \cdot \bar{v}$
$\nabla f \cdot \bar{n}$

Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός αλλαγής;

(σε σταθεροποιημένο σημείο άρα ξέρω το ∇f) (αφού έχω εσωτερικό γινόμενο) $\nabla f \cdot \bar{v}$ ($\|\bar{v}\|=1$)

↳ Διανύσματα παράλληλα (ομόρροπα $\nabla f \uparrow\uparrow \bar{v}$)

Παράδειγμα 10 $f(x,y)=x^2+y^2$



καμπύλες στάθμης (κύκλοι)

* κατεύθυνση για μέγιστη αύξηση (κινούμαι κατά την ακτίνα για να φτάσω στην επόμενη καμπύλη στάθμης)

$\nabla F = (2x, 2y) = 2(x,y)$

Διάλεξη 11 26/3

Θεώρημα Έστω $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1 και $(x_0,y_0,z_0) \in S$ σύνολο στάθμης και $f(x,y,z)=k$ (σταθερά). Τότε το $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S (στάθμης). Δηλαδή αν $\bar{\sigma}(t)$ καμπύλη που περιέχεται στην S και περιέχει το σημείο (x_0,y_0,z_0) τότε $\nabla f \perp \sigma'(t)$ στο σημείο $\vec{\sigma}(0)=x_0,y_0,z_0$.

Απόδειξη Αφού $\bar{\sigma}(t)$ περιέχεται στην S $=(x(t),y(t),z(t))$ έχω ότι $f(\bar{\sigma}(t))=k \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(\bar{\sigma}(t))=0 \Rightarrow \nabla f \cdot \bar{\sigma}'(t)=0$ άρα $\nabla f \perp \bar{\sigma}'(t)$ στο (x_0,y_0,z_0).

Εφαπτόμενο επίπεδο στην S στο σημείο (x_0,y_0,z_0)

$\rightsquigarrow$ Αν (x,y,z) τυχαίο σημείο του εφαπτόμενου επιπέδου τότε το ευθύγραμμο τμήμα $(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \perp \nabla f$ συνεπώς

$$\nabla f\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} (x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0 \iff \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)=0$$

Παράδειγμα 1 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου στο γράφημα της $f(x,y)=x^2+4y^2$, στο σημείο $(x_0,y_0)=(2,-1)$

α' τρόπος: $z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=$
$=8+4(x-2)-8(y+1) \Rightarrow z=4x-8y-8$

β' τρόπος: Ορίζω $F(x,y,z)=z-f(x,y)$ [οπότε $F(x,y,z)=0 \iff z=f(x,y)$]
Δηλαδή το γράφημα της $z=f(x,y)$ είναι το σύνολο στάθμης $F(x,y,z)=0$.

Οπότε το εφαπτόμενο επίπεδο δίνεται από τη σχέση:

$\nabla f(x-x_0, y_0-y_0, z-z_0)=0$, δηλ $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(x-2, y+1, z-8)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)\cdot(x-2, y+1, z-2)=0 \Leftrightarrow (-4,8,1)(x-2,y+4,z-8)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z=4x-8y-8$ $(z_0=f(x_0,y_0)=8)$

Παράδειγμα 2 Βρείτε μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια $\underbrace{x^3y^3+y-z=0}_{f(x,y,z)=0}$ στο σημείο $(0,0,2)$

$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}$

$\nabla f\cdot(x-0, y-0, z-2)=0$ (για το επίπεδο)

$\nabla f=(f_x, f_y, f_z)=(3x^2y^3, 3x^3y^2+1, -1)$, $\nabla f|_{(0,0,2)}=(0,1,-1)$ άρα μοναδιαίο κάθετο

$\vec{n}=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}=\frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}$

Αν f στο σημείο $\overline{x_0}$ έχει όλες τις κατά κατεύθυνση παραγώγους:

↳ είναι η f παραγωγίσιμη; ↳ Είναι η f συνεχής;

ΟΧΙ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΑ! (βλέπετε άσκηση φυλλαδίου)

Θεώρημα **ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ στον $\mathbb{R}^n$**

Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ παρ/μη, τότε αν $\bar{y}, \bar{x}\in\mathbb{R}^n$, $\exists\ \bar{z}$ σημείο που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα $\bar{x}$ και $\bar{y}$, τ.ω.

$$f(\bar{y})-f(\bar{x})=\nabla f(\bar{z})(\bar{y}-\bar{x})$$

Απόδειξη $g(t)=f((1-t)\bar{x}+t\bar{y})$, $0\le t\le 1$

$g(0)=f(\bar{x})$, $g(1)=f(\bar{y})$ άρα $f(\bar{y})-f(\bar{x})=g(1)-g(0)=g'(\xi)(1-0)$, όπου $0<\xi<1$. Όμως $g'(\xi)=g'(t)\big|_{t=\xi}=\nabla f\cdot\frac{d}{dt}((1-t)\bar{x}+t\bar{y})\big|_{t=\xi}=$

$=\nabla f\big|_{t=\xi}(\bar{y}-\bar{x})=\nabla f(\underbrace{(1-\xi)\bar{x}+\xi\bar{y}}_{z})(\bar{y}-\bar{x})$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΥΨΗΛΟΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

$f(x,y)=x^2\cos y$, $\frac{\partial f}{\partial x}=2x\cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2\cos y$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=-2x\sin y=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(-x^2\sin y)=-2x\sin y=$
$=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

Θεώρημα Αν η f είναι κλάσης C^2 (δηλ $\exists$ όλες οι μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς) τότε $f_{xy}=f_{yx}$ δηλ στις δεύτερες παραγώγους δεν έχει σημασία η σειρά παραγώγισης.

Όμως: Χρειάζεται μεγάλη προσοχή όταν χρησιμοποιώ κανόνα αλυσίδας για 2ες παραγώγους!!!