Διάλεξη 14 7/4

Ορισμός κρίσιμων σημείων

$f(x,y,z)$ στο ελαχίστου ή μεγίστου (τοπικά) $\Rightarrow \nabla f = 0$.
Τα σημεία αυτά λέγονται κρίσιμα σημεία (όταν $\nabla f = 0$)

↳ το κρίσιμο σημείο μπορεί να είναι τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο, σάγμα
(i) (ii) (iii)

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΚΡΙΣΙΜΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

Απ I $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 κρίσιμο σημείο $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + R_2(x,h) \Rightarrow$
(Taylor 2ης τάξης)

$\Rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{\frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + R_2}_{\left(h^2\left(\frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{R_2}{h^2}\right) > 0\right)}$ άρα το x_0 είναι ελάχιστο

Αντίστοιχα αν $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ μέγιστο

Αν $f''(x_0) = 0$ συνεχίζω με Taylor και θα αποφασίσει αυτό

Απ II $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $\bar{x}_0$ κρίσιμο σημείο ($\nabla f(\bar{x}_0) = 0$), C^2.
Θέλω να το ταξινομήσω, κάνω Taylor (πολλών μεταβλητών)

Taylor 2ης τάξης. $f(\bar{x}_0 + \bar{h}) = f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0)\cdot \bar{h} + \frac{1}{2}\bar{h}^T H(x_0)\bar{h} + R_2(\bar{x}_0, \bar{h})$
$\Rightarrow f(\bar{x}_0 + \bar{h}) = f(\bar{x}_0) + \frac{1}{2} \bar{h}^T H(x_0)\bar{h} + R_2$

↑ χρειάζομαι γραμμική άλγεβρα (τετραγωνικές μορφές)

$$Hf(x_0) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\bar{x}_0) & f_{x_1x_2}(\bar{x}_0) & \dots & f_{x_1x_n}(\bar{x}_0) \\ f_{x_2x_1}(\bar{x}_0) & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ f_{x_nx_1}(\bar{x}_0) & \dots & & f_{x_nx_n}(\bar{x}_0) \end{bmatrix}$$

← Εσσιανός πίνακας (Συμμετρικός)

Έστω $A = \{a_{ij}\}$ όπου $i,j = 1, \dots, n$ συμμετρικός πίνακας
$g(\bar{h}) = \bar{h}^T A \bar{h} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} h_i h_j$

Ένας πίνακας A είναι θετικά ορισμένος αν $g(\bar{h}) \geq 0$ ($=0$ ανν $\bar{h} = 0$)

> Για να έχω $\bar{x}_0$ σημείο ελαχίστου πρέπει ο $Hf(x_0)$ να είναι θετικά ορισμένος

Θα αποδείξω αυτή την πρόταση (*)

Λήμμα Αν A συμμετρικός και $\bar{h}^T \bar{h} \geq 0$ (θετικά ορισμένος) τότε:
$g(\bar{h}) = \bar{h}^T A \bar{h} \geq M \|\bar{h}\|^2$, $\forall \bar{h} \in \mathbb{R}^n$

Απόδειξη: Για $\bar{h} \neq 0$, $g(\bar{h}) = g\|\bar{h}\|\frac{\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = \|\bar{h}\|^2 g'\left(\frac{\bar{h}}{\|\bar{h}\|}\right)$

Από ανάλυση → Αν έχω μία συνάρτηση συνεχή και φραγμένη σε κλειστό διάστημα έχει μέγιστο και ελάχιστο

Άρα $\|\bar{h}\|^2 g'\left(\frac{\bar{h}}{\|\bar{h}\|}\right) \geq M\|\bar{h}\|^2$ με $M>0$

πήγα στην μοναδιαία σφαίρα που μου δίνει κάτω φράγμα για να μην είμαι σε όλο τον $\mathbb{R}^3$ (βρίσκω κλειστό+φραγμένο διάστημα)

Θεώρημα: Αν $\frac{1}{2}\bar{h}^T H \bar{h}$ θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή, τότε $\bar{x_0}$ σημείο τοπικού ελαχίστου

Απόδειξη: Από Taylor $2^{ης}$ τάξης $(\nabla f(x_0)=0)$

$$f(\bar{x_0}+\bar{h}) = f(\bar{x_0}) + \underbrace{\frac{1}{2}\bar{h}^T \bar{h}}_{\geq \frac{M}{2}\|\bar{h}\|^2} + R_2(\bar{x_0},\bar{h}) \geq f(\bar{x_0}) + \underbrace{\left(\frac{M}{2} + \frac{R_2(\bar{x_0},\bar{h})}{\|\bar{h}\|^2}\right)\|h\|^2}_{>0 \text{ για μικρό } \bar{h}}$$

⟶ Για μικρά $\bar{h}$ $f(\bar{x_0}+\bar{h}) > f(\bar{x_0})$, άρα $\bar{x_0}$ τοπικό ελάχιστο

Για ευκολία έστω $n=2$ (δηλ. $\mathbb{R}^2$)

$A = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ b & c \end{bmatrix}$, $H(\bar{h}) = \frac{1}{2}\bar{h}^T A \bar{h} = \frac{1}{2}(\alpha h_1^2 + 2b h_1 h_2 + c h_2^2)$

Πότε είναι η A (H) τετραγωνική μορφή θετικά ορισμένη;

Για να αποφύγω το να πάρω περιπτώσεις, έστω $\alpha \neq 0$. (αν $\alpha=0$ το ίδιο επιχείρημα δουλεύει)

• Συμπληρώνω το τετράγωνο και έχω: $H(\bar{h}) = \frac{1}{2}\alpha\left(h_1+\frac{b}{\alpha}h_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(c-\frac{b^2}{\alpha}\right)h_2^2$

Έστω A θετικά ορισμένος: Για $h=0 \Rightarrow \alpha>0$ (μόνο έτσι δουλεύει)

Αν $h_1 = -\frac{b}{\alpha}h_2$, $c-\frac{b^2}{\alpha}>0$ δηλ.

$\alpha>0$, $c\alpha-b^2>0$

όμως ισχύει και το αντίστροφο

Αν $\alpha>0$, $c\alpha-b^2>0 \Rightarrow A$ θετικά ορισμένος

(δια παρατηρήσεως) ικανή και αναγκαία συνθήκη ένας πίνακας 2×2 να είναι θετικά ορισμένος

Για να είναι αρνητικά ορισμένος πρέπει $\alpha<0$, $\alpha c-b^2>0$

ΟΜΟΣΗΜΑ Α ΚΑΙ ΟΡΙΖΟΥΣΑ	ΕΤΕΡΟΣΗΜΑ	$\alpha=0$
Α θετικά ορισμένος	Α αρνητικά ορισμένος	σάγμα

⟶ Αν $\alpha c-b^2=0$, το κριτήριο της $2^{ης}$ παραγώγου αποτυγχάνει. Έχουμε εκφυλισμένο σημείο

Έστω A nxn συμμετρικός πίνακας. Ο A είναι θετικά ορισμένος αν

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} \; a_{23} & & \\ & & \ddots & \\ a_{1n} & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$d_1 = a_{11}$, $d_2 = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \dots$

$d_n = \det A$.

- Αν $d_1>0, d_2>0, d_n>0$ ο A είναι θετικά ορισμένος
- Αν $d_1<0, d_2>0, d_3<0, \dots$ (εναλλάξ) τότε ο A είναι αρνητικά ορισμένος

Θεώρημα ← πολύ σημαντικό ! SOsososososo...

ΚΡΙΤΗΡΙΟ 2ης ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $f \in C^2$ και x_0 κρίσιμο σημείο. $H = Hf(x_0)$ ο Εσσιανός πίνακας (πίνακας 2ων παραγώγων) και $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n = \det H$. Τότε:

(A) $d_n = \det H \neq 0$

(1) Αν $d_1>0, d_2>0, \dots, d_n>0$ το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου

(2) Αν $d_1<0, d_2>0, d_3<0, \dots$ το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου

(3) Ούτε το (1) ούτε το (2), το x_0 είναι σάγμα

(B) $d_n = \det H = 0$. Το κριτήριο αποτυγχάνει, έχω εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο. Χρειάζονται άλλες τεχνικές για να αποφασίσω τη φύση του κρίσιμου σημείου x_0

Διάλεξη 15 9/4

ΠΡΟΟΔΟΣ

Θέμα 3ο $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(i) Μερικές παράγωγοι; • $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

παρόμοια για $\frac{\partial f}{\partial y}$

(ii) Είναι συνεχής; Ναι

→ $\frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|y^2}{y^2} = |x| \to 0$, από ΚΠ

→ $\frac{|x|y^2}{x^2+y^2} < \frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |x| \to 0$ (καλύτερο)

(iii) είναι παραγ/μη στο (0,0); Όχι

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(x-0)-f_y(y-0)}{\|(x,y)\|}$ ⇝ πολικές $\frac{r^3 \cos\theta \sin^2\theta}{r^3}$

που το $\cos\theta\sin^2\theta \neq 0$ για τυχαίο θ

$\boxed{\text{Παράδειγμα 1}}$

$f(x,y) = x^2+xy+y^2+2x-2y+5$ ← πάω να βρω κρίσιμα σημεία

$\begin{cases} f_x=0 \Rightarrow 2x+y+2=0 \\ f_y=0 \Rightarrow x+2y-2=0 \end{cases}$ ← βγήκε γραμμικό (δεν θα βγαίνει πάντα

$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & +2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2-\frac{1}{2}r_1 \to r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1,5 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 \cdot \frac{2}{3} \to r_2]{r_1/2 \to r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ $x=-2$, $y=2$

$\boxed{\bullet f_{x\cancel{x}}=2 \quad \bullet f_{xy}=1 \quad \bullet f_{yy}=2}$

$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det H = 3>0 \ (\neq 0)$ $\quad d_1=2>0$, $d_2=\det H=3>0$

άρα το $(x,y)=(-2,2)$ είναι ελάχιστο

$\boxed{\text{Παράδειγμα 2}}$ $f(x,y,z) = x^3+xy^2+x^2+y^2+3z^2$

$\bullet f_x = 3x^2+y^2+2x=0 \ (1)$ $\bullet f_y = 2xy+2y=0$ $\bullet f_z = 6z=0 \Rightarrow z=0$

$\hookrightarrow y=0$ ή $x=-1$

Έστω $\boxed{y=0}$ τότε $(1) \Rightarrow 3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(3x+2)=0$ → $x=0$, $x=-2/3$

Άρα μέχρι στιγμής $(0,0,0)$ και $(-\frac{2}{3},0,0)$

έστω $x=-1$: $(1) \Rightarrow y^2+1=0$ αδύνατο, άρα έχω 2 μοναδικά

$\bullet f_{xx}=6x+2 \quad \bullet f_{yy}=2x+2 \quad \bullet f_{zz}=6$

$\bullet f_{xy}=2y \quad \bullet f_{xz}=0 \quad \bullet f_{yz}=0$

$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $\det H = 24>0$ $\quad d_1=2>0$, $d_2=4>0$, $d_3=24>0$

Άρα $(0,0,0) \to$ ελάχιστο

έστω $(-\frac{2}{3},0,0)$, $H = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $\det H<0$

διαγώνιος

$d_1<0$, $d_2=-\frac{4}{3}<0$ άρα $(-\frac{2}{3},0,0)$ είναι σάγμα

$\boxed{\text{Παράδειγμα 3}}$ $f(x,y) = x^4+x^2+y^4$

$\bullet f_x = 4x^3+2x=0 \Leftrightarrow 2x(2x^2+1)=0$ $\bullet f_y = 4y^3=0 \Rightarrow y=0$ $\Big\} (x,y)=(0,0)$

όμως $f(x,y) \geq 0$ και $f(0,0)=0$ άρα $(x,y)=(0,0)$ είναι ελάχιστο!

$\boxed{\bullet f_{xx}=12x^2+2 \quad \bullet f_{yy}=12y^2 \quad \bullet f_{xy}=0}$ $\quad Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\det H=0$

Άρα $(0,0)$ εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο

δεν δουλεύει το τεστ της 2ης παραγώγου, άρα παρατηρώ τα παραπάνω

Παράδειγμα 4 $g(x,y) = x^4 - x^2 + y^4$

- $g_x = 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2-1) = 0$
- $g_y = 4y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$

κρίσιμα σημεία $(0,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

$\boxed{\bullet\, g_{xx} = 12x^2 - 2 \quad \bullet\, g_{yy} = 12y^2 \quad \bullet\, g_{xy} = 0}$

έστω $(0,0)$: $H = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\det H = 0$ εκφυλισμένο

είναι τελικά σάγμα (δεν το απέδειξα αλλά σκέφτομαι

$g = \underbrace{x^2(x^2-1)}_{<0} + \underbrace{y^4}_{>0}$ όπου x, y ανεξάρτητες)

έστω $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $H = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$g(\sqrt{2}/2, 0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ δύσκολο, το παρατάω