

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρασκευή 16 Οκτωβρίου 2026

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός ΙΙΙ

Φυλλάδιο 4

1) Αν B_1 είναι η μοναδιαία μπάλα στον $\mathbf{R}^3$, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{B_1} \frac{dxdydz}{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

με χρήση κατάλληλης αλλαγής συντεταγμένων

2). Βρείτε το κέντρο βάρους του χωρίου που φράσσεται από τα επίπεδα

$$x=0, \qquad y=0, \qquad z=0, \qquad x+y+z=2. \qquad (\text{Απ. } (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}))$$

3). Αν $B_1 \subset \mathbf{R}^3$ είναι η μοναδιαία μπάλα, ελέγξετε αν υπάρχει το παρακάτω ολοκλήρωμα, και αν υπάρχει, υπολογίστε το.

$$\int_{B_1} \frac{|xyz|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz \ .$$

4). Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \int_y^\infty y^2 e^{-x^4} dxdy.$$

5) Δείξτε ότι

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Παράδοση: Πέμπτη 22 Οκτωβρίου την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)