

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρασκευή 23 Οκτωβρίου 2026

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός ΙΙΙ

Φυλλάδιο 5

1) Βρείτε το μήκος της έλικας $\vec{\sigma}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ για $0 \leq t \leq T$. Βρείτε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσμα στο σημείο $\vec{\sigma}(T)$.

2). Δίδεται η καμπύλη $\vec{\sigma}(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$ για $t \geq 0$. Τί παριστάνει για $t \to +\infty$; Δείξτε οτι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \|\vec{\sigma}'(t)\|dt$ υπάρχει. Τι σημαίνει αυτό για την καμπύλη $\vec{\sigma}(t)$;

3). Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\vec{\sigma}} f(x,y,z)ds$ στις παρακάτω περιπτώσεις

(α) $f(x,y,z) = z$ και $\vec{\sigma}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ για $0 \leq t \leq 4\pi$.

(β) $f(x,y,z) = yz$ και $\vec{\sigma}(t) = (t, 3t, 2t)$ για $0 \leq t \leq 3$.

4). Δείξτε οτι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(x,y)$ κατά μήκος της καμπύλης που δίδεται σε πολικές συντεταγμένες απο την σχέση $r = r(\theta)$, για $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ είναι

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Υποδ. Παρατηρήστε οτι η παραμετρική αναπαράσταση της καμπύλης είναι

$$\vec{\sigma}(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta).$$

Στη συνέχεια υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης $r = 1 + \cos\theta$ για $0 \leq \theta \leq 2\pi$. (Απ. $L = 8$)

Παράδοση: Πέμπτη 29 Οκτωβρίου την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)