Διάλεξη 7 13/10/2026

ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

$T: \underset{(u,v,w)}{\mathbb{R}^3} \supset W^* \longrightarrow W \subset \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3}$ $\quad T: 1\text{-}1$, επί

$x = x(u,v,w)$

$y = y(u,v,w)$

$z = z(u,v,w)$

$$\int_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{W^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

κυλινδρικές $= r$ $\quad$ σφαιρικές $= \rho^2 \sin\phi$

$$= \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$$

2 αλλαγές (σε συστήματα συντεταγμένων) θα δούμε χωρίς να κάνουμε πράξεις για την Ιακωβιανή

1. **Κυλινδρικές**: $x = r\cos\vartheta$
$y = r\sin\vartheta$, $0 < \vartheta < 2\pi$
$z = z$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Σφαιρικές**: $x = \rho\sin\phi\cos\vartheta$
$y = \rho\sin\phi\sin\vartheta$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$
$z = \rho\cos\phi$, $0 \le \phi \le \pi$
$r = \rho\sin\phi$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\vartheta & -\rho\sin\phi\sin\vartheta & \rho\cos\phi\cos\vartheta \\ \sin\phi\sin\vartheta & \rho\sin\phi\cos\vartheta & \rho\cos\phi\sin\vartheta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 1

$$I = \int_{B_1} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV \qquad B_1 : x^2+y^2+z^2 \le 1$$

$$(x^2+y^2+z^2)^{3/2} = (\rho^2)^{3/2}$$

Σφαιρικές: (ρ, ϑ, ϕ)

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{\rho^3} \rho^2 \sin\phi \, d\phi \, d\vartheta \, d\rho$$

$$\rightsquigarrow \int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi = [-\cos\phi]_0^{\pi} = 2$$

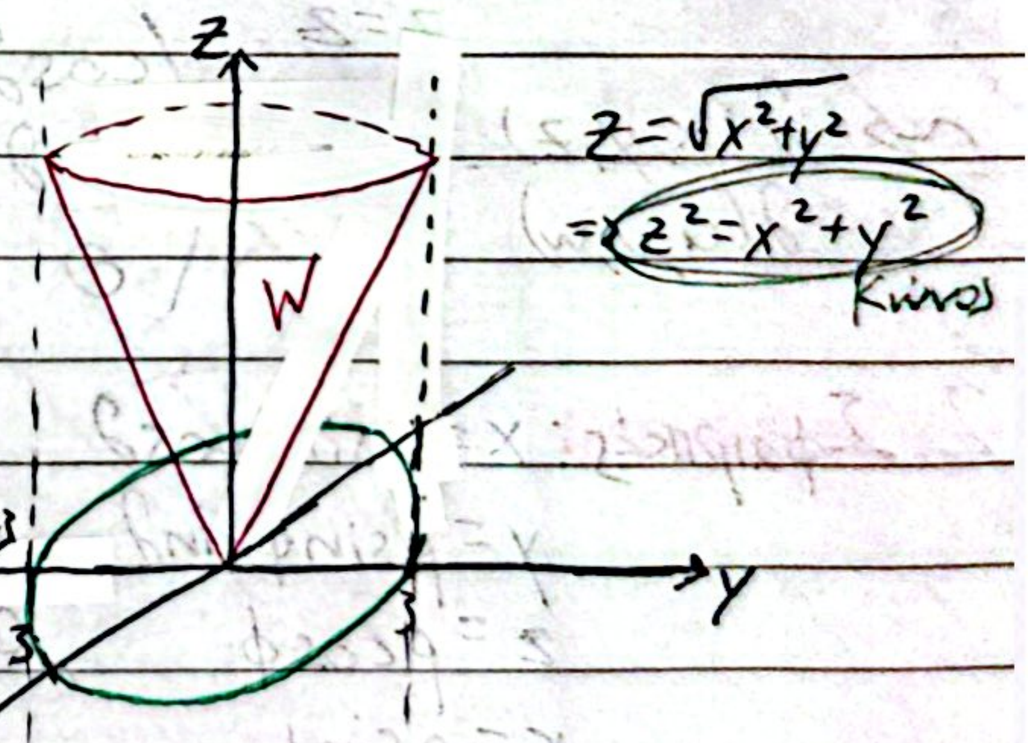
$$\rightsquigarrow 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{\rho^3} \rho^2 \, d\vartheta \, d\rho$$

$$\rightsquigarrow \int_0^{2\pi} 1 \, d\vartheta = 2\pi$$

$$\rightsquigarrow I = 4\pi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho = 4\pi \left[\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{4\pi(e-1)}{3}$$

Παράδειγμα 2

$$I = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dz \, dy \, dx$$



$z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z^2 = x^2+y^2$ κώνος

→ Γράφουμε το I σε κυλινδρικές: (r, ϑ, z)

$$I = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_r^3 \frac{e^z}{r} \cdot r \, dz \, d\vartheta \, dr$$

ιακωβιανή

$$= e^3 - e^r$$

$$\rightsquigarrow \int_0^3 \int_0^{2\pi} (e^3 - e^r) \, d\vartheta \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^3 (e^3 - r e^r) \, dr = 2\pi(3e^3 - e^3 + 1) = 2\pi(2e^3+1)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Μέση τιμή συνάρτησης
2. Κέντρο βάρους (ή μάζας) σώματος

$\rightsquigarrow$ 1. $f: D \to \mathbb{R}$

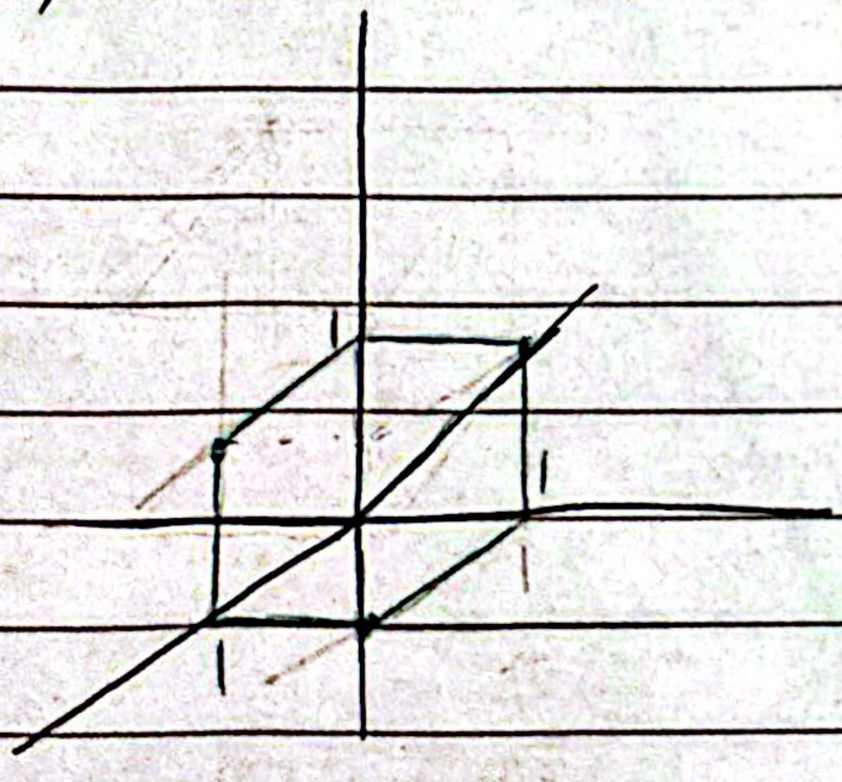
$D \subset \mathbb{R}^{2 \text{ ή } 3}$

$$[f]_{\text{Μ.Τ.}} = \frac{\iint_D f\,dA}{\iint_D 1\,dA \quad (= A(D))}$$

Παράδειγμα

Η θερμοκρασία T στον κύβο $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ είναι ανάλογη της $x^2+y^2+z^2$

$\rightsquigarrow T = \lambda(x^2+y^2+z^2)$ i/ $[T]_{\text{Μ.Τ.}} = ?$



$$[T] = \frac{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz}{2^3}$$

$$\rightsquigarrow \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2\,dx\,dy\,dz + \iiint y^2\ldots + \iiint z^2\ldots$$

$$= 3\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2\,dx\,dy\,dz$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\rightsquigarrow 3\cdot\frac{8}{3} = 8$$

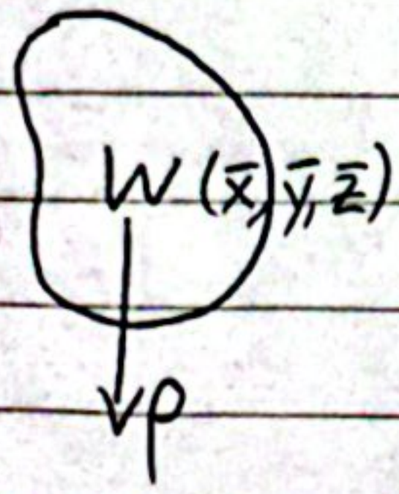
$\therefore [T] = \lambda \cdot 8 = \lambda$

8

ii/ Σε πολλά σημεία του κύβου έχουμε $T = \lambda$

$T = \lambda(x^2+y^2+z^2) = \lambda \iff x^2+y^2+z^2 = 1$

~> 2.



$$\bar{x} = \frac{\int_W x\rho\, dV}{\int_W \rho\, dV}$$

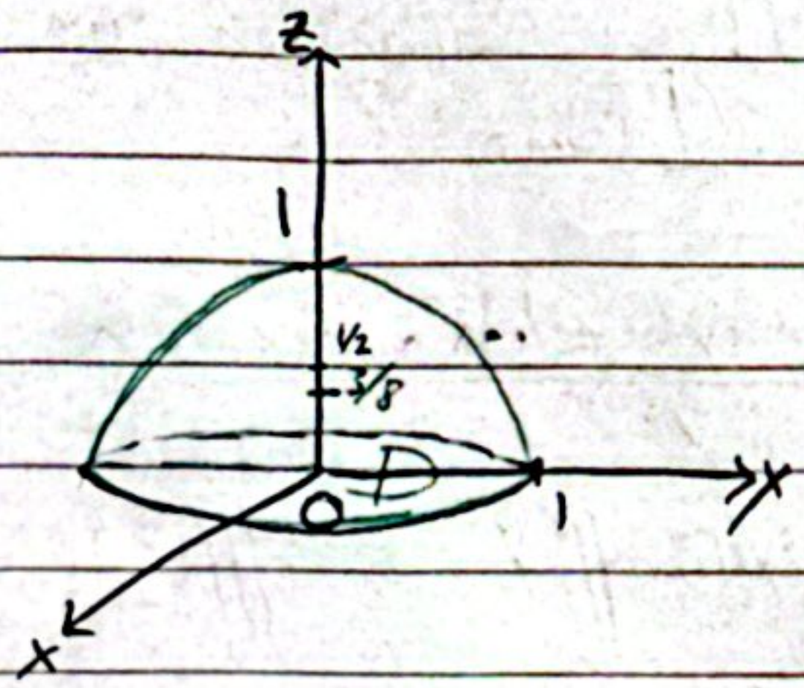
Παράδειγμα 2

Βρείτε το κέντρο βάρους του ημισφαιρίου (σταθερής πυκνότητας)

~> $x^2+y^2+z^2 \le 1$

$z > 0$ για να έχουμε την ημισφαίρα

λόγω συμμετρίας $\bar{x} = \bar{y} = 0$



$$\frac{1}{2}(1-x^2-y^2) = \frac{1}{2}(1-r^2)$$

$$\bar{z} = \frac{\int_W z\, dV}{\int_W dV} = \frac{\iint_D \int_0^{\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)} z\, dz\, dx\, dy}{\frac{2\pi}{3}} = \dots = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{8}$$

Διάλεξη 8 15/10/2026

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ (ΚΑΤΑΧΡΗΣΤΙΚΑ) ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

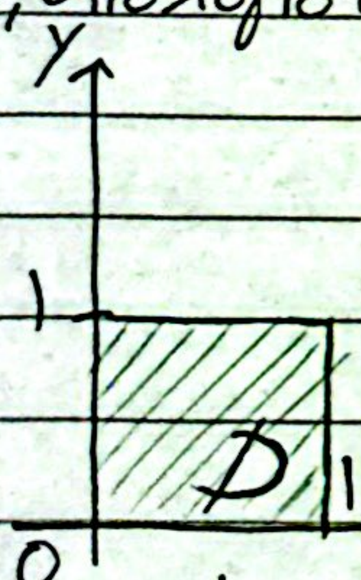
~> Ίδια λογική στα διπλά ή τριπλά ολοκληρώματα

Παρατήρηση: i/ Αν το γράψουμε ως διαδοχικά ολοκληρώματα και άρα υπάρχουν, είμαστε ok
ii/ Μερικές φορές αλλάζοντας μεταβλητές (πχ πολικές, σφαιρικές) ο απειρισμός χάνεται

Παράδειγμα 1

Ελέγξτε αν $\exists$ το $I=\int_D \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dA$ και αν ναι, υπολογίστε το. $D=[0,1]\times[0,1]$

όχι φραγμένη στο D



$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy$$

$$\rightsquigarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \dots = 2$$

$$\rightsquigarrow 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \dots = 2\cdot 2 = 4$$

Παράδειγμα 2

$$\int_D \frac{1+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA \qquad D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$$

Μοναδιαίος δίσκος

Με πολικές: $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

$$\rightsquigarrow \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1+r^2\cos\theta\sin\theta}{r}\cdot r\,dr\,d\theta$$

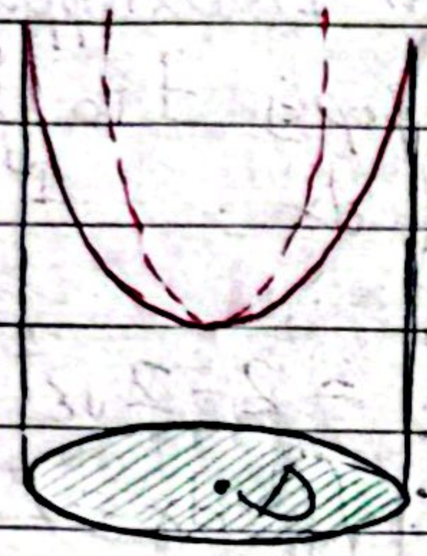
ιακωβιανή

$$\rightsquigarrow \left[r+\frac{r^3}{3}\cos\theta\sin\theta\right]_0^1 = 1+\frac{\cos\theta\sin\theta}{3} = 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\rightsquigarrow \int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{6}\sin 2\vartheta\right)d\vartheta = \cdots = 2\pi$$

Παράδειγμα 3

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy \quad , D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$$



Με πολικές: $\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,dr\,d\vartheta$

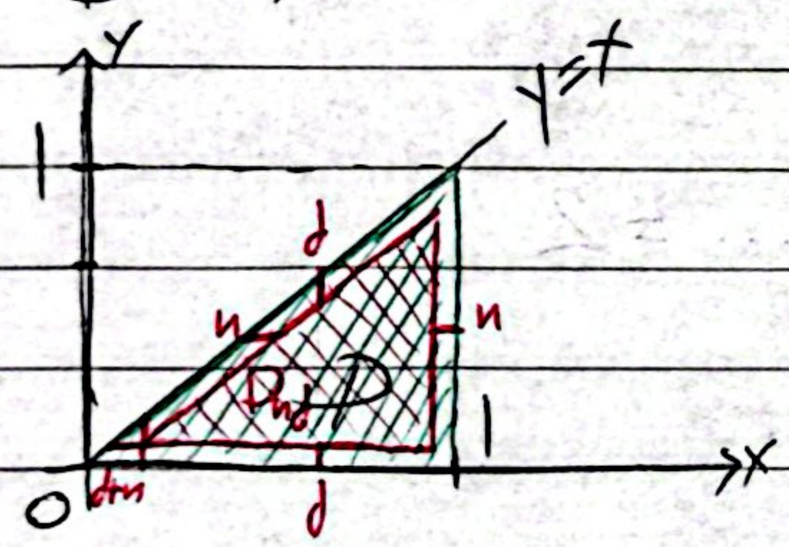
$\rightsquigarrow \int_0^1 (1-r^2)^{-1/2} r\,dr = \left[-(1-r^2)^{1/2}\right]_0^1 = 1$

$\left((1-r^2)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}(1-r^2)^{-1/2}(-2r) = -r(1-r^2)^{-1/2}$

$\rightsquigarrow \int_0^{2\pi} 1\,d\vartheta = 2\pi$

Παράδειγμα 4

$$I=\iint_D \frac{1}{x-y}\,dA$$



$$I=\int_0^1\int_0^x \frac{1}{x-y}\,dydx$$

$\rightsquigarrow \left[-\ln(x-y)\right]_0^x = -\ln 0 + \ln x$

πρόβλημα

Αυστηρή Μελέτη: Στο D_{nd} η συνάρτηση $\frac{1}{x-y}$ είναι φραγμένη

$\therefore \exists$ το I και το υπολογίζουμε: $\iint_{D_{nd}} \frac{1}{x-y}\,dA \overset{x-y}{=} \int_{n+d}^{1-n}\int_d^{x-d} \frac{1}{x-y}\,dydx$

Στις πράξεις που παραλείπονται, χρησιμοποιούνται: $\int \frac{1}{t}\,dt = \ln t$

$\int \ln t\,dt = t\ln t - t$

$\rightsquigarrow -(1-2n)\ln d + (1-n-d)\ln(1-n-d) + (1-n-d) + (n-d)\ln(n-d)$

$\therefore$ Δτο όριο $\therefore$ Δ το γενικευμένο ολοκλήρωμα

Θα πάρουμε το όριο $D_{nd}\to D$, δηλαδή $(n,d)\to 0$

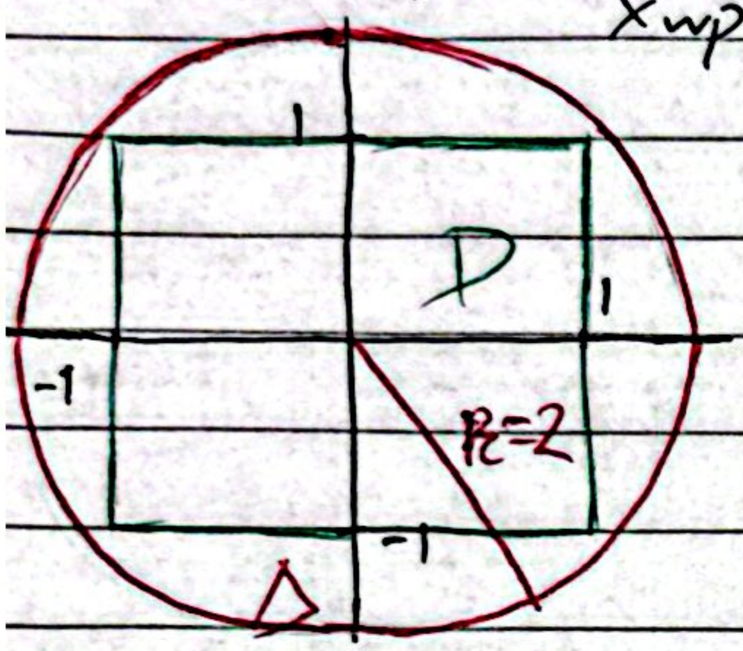
$n\to 0$, $1-n\to 1$, $d\to 0$, $n-d\to 0$, $1-n-d\to 1$

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

Παρατήρηση: Αν $0 < \int_D f dA < \int_D \bar{f} dA$ και το 2ο γενικευμένο ολοκλήρωμα $\exists$ τότε $\exists$ και το 1ο

Παράδειγμα 5

$I = \int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dA$ $\quad D = [-1,1] \times [-1,1]$ Ελέγξτε αν υπάρχει χωρίς να το υπολογίσετε



φράσσουμε το τετράγωνο σε έναν μεγαλύτερο κύκλο

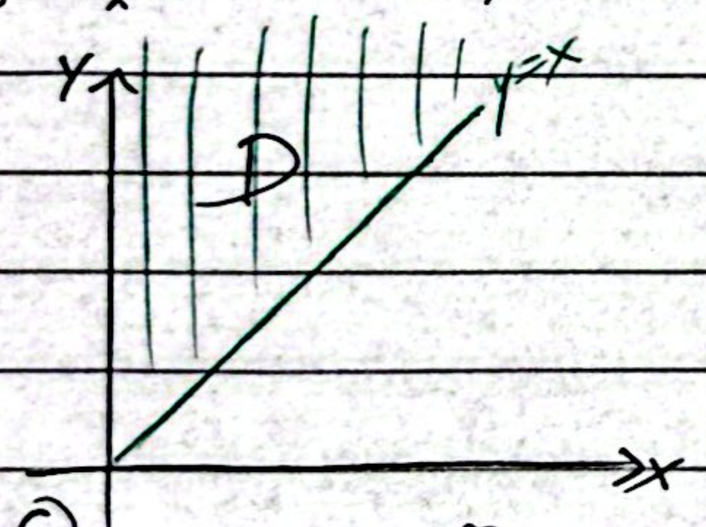
$D < \Delta$ (δίσκος ακτίνας 2)

$I = \int_\Delta \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \overset{\text{πολικές}}{=\!=} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{1}{r} r\, dr\, d\theta = 4\pi$

$\therefore I < 4\pi \therefore \exists$

Παράδειγμα 6

$I = \int_0^\infty \int_x^\infty x e^{-y^3} dy dx$ $\exists$, δεν υπολογίζεται $\therefore$ κάνουμε αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης



$= \int_0^\infty \int_0^y x e^{-y^3} dx dy$

$\rightsquigarrow e^{-y^3} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y$

$\rightsquigarrow \frac{1}{2} \int_0^\infty y^2 e^{-y^3} dy = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{3}\right) e^{-y^3}\right]_0^\infty = \frac{1}{6}$