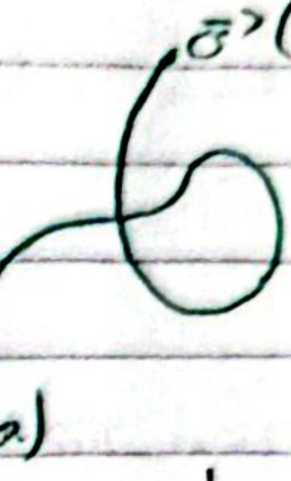
Διάλεξη 9 — 22/10/2026

ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

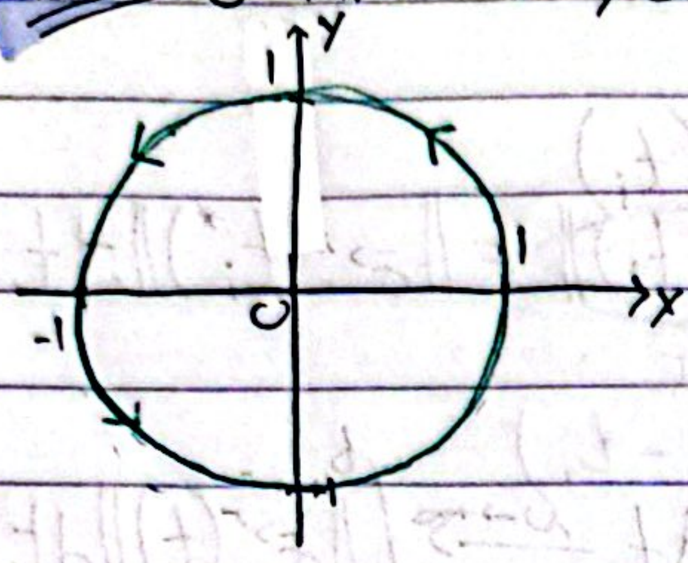
$\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \le t \le b$

$\vec{\sigma}$ μπορεί να είναι (C⁰ συνεχείς μόνο, ή C¹ παραγωγίσιμες μία φορά, ή C^k)



Πχ $\vec{\sigma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$

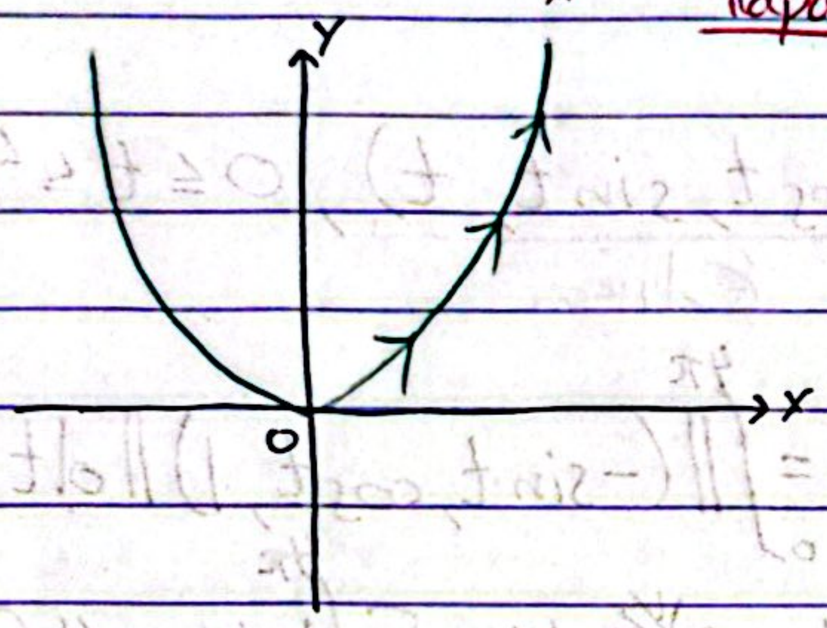
x y κύκλος



Προσανατολισμός καμπύλης: η φορά με την οποία διαγράφεται η καμπύλη

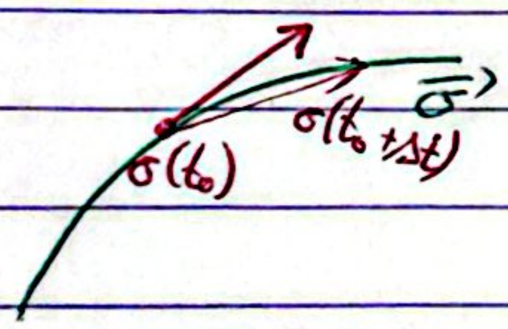
Πχ $\vec{\sigma}(t) = (t, t^2)$, $0 < t < \infty$

x y παραβολή



Εφαπτόμενο Διάνυσμα Σε Καμπύλη: $\vec{\sigma}'(x) = (x'(t), y'(t))$

όχι απαραίτητα μοναδιαίο
↝ αν θέλουμε να το κάνουμε μοναδιαίο διαιρούμε τις συνεταγμένες με το μήκος

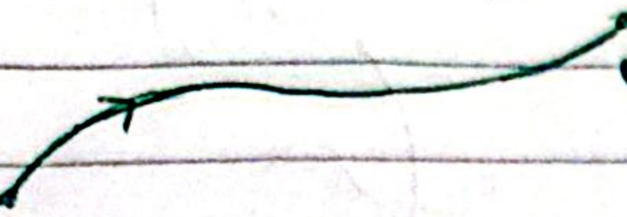


Φυσική Εικόνα: $\vec{\sigma}(t)$ - θέση υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t

↝ $\vec{\sigma}'(t)$ - ταχύτητα του υλικού σημείου (και ως μέτρο και ως κατεύθυνση)

μέτρο = $\|\vec{\sigma}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$

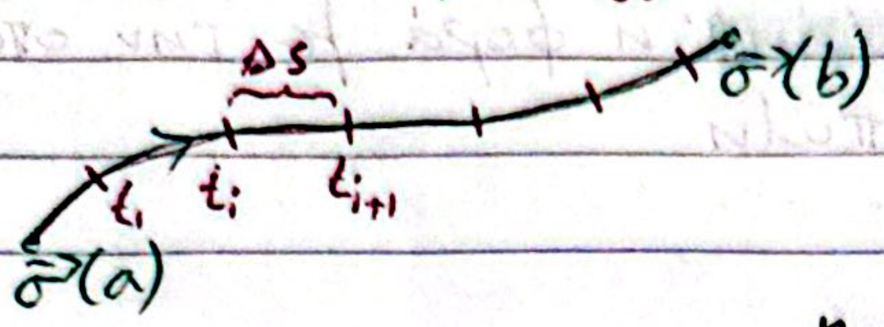
Ποιό είναι το μήκος της καμπύλης (φυσική προσέγγιση)



$$\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t)), \quad a \le t \le b$$

Μήκος καμπύλης: $\int_a^b \|\vec{\sigma}'(t)\| dt$ ολοκληρώνω την ταχύτητα ως προς το χρόνο

(Μαθηματική προσέγγιση)



$$\Delta\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(t_{i+1}) - \vec{\sigma}(t_i)$$

$$\|\Delta\vec{\sigma}\| = \|\vec{\sigma}(t_{i+1}) - \vec{\sigma}(t_i)\| = \|\vec{\sigma}'(t_i^*)\| \Delta t$$

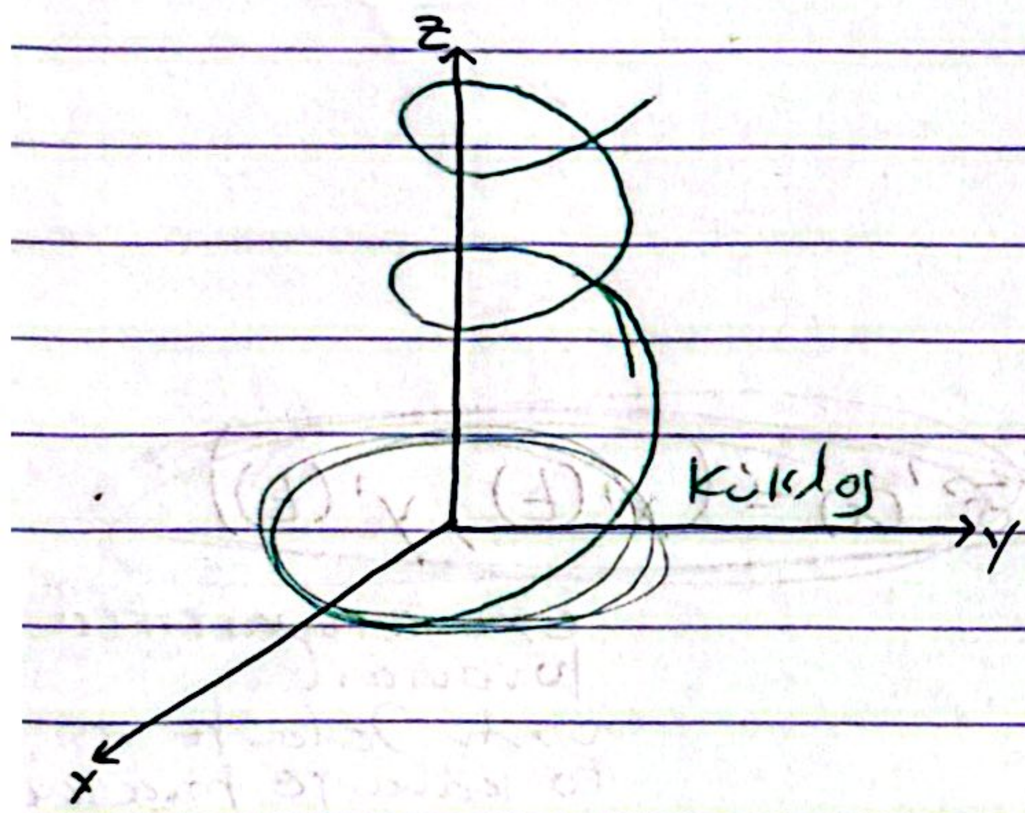
OUT

$$\vec{\sigma}'(t_i^*)(t_{i+1} - t_i)$$

Μήκος καμπύλης: $\simeq \sum_{i=1}^{n} \|\Delta\vec{\sigma}_i\| = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{\sigma}'(t_i^*)\| \Delta t \xrightarrow{n\to+\infty} \int_a^b \|\vec{\sigma}'(t)\| dt$

Παράδειγμα

Βρείτε το μήκος της καμπύλης $\vec{\sigma}(t) = (\underbrace{\cos t, \sin t, t}_{\text{Έλικα}})$, $0 \le t \le 4\pi$



$$L = \int_0^{4\pi} \|\vec{\sigma}'(t)\| dt = \int_0^{4\pi} \|(-\sin t, \cos t, 1)\| dt =$$

$$= \int_0^{4\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t + 1)^{1/2} dt = \sqrt{2} \int_0^{4\pi} 1 \, dt = 4\sqrt{2}\pi$$

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

$\vec{\sigma}(t) = (t, t^2)$, $\vec{\sigma}(s) = (s^3, s^6)$, $\vec{\sigma}(s) = (s^{2k+1}, s^{4k+2})$,
$\vec{\sigma}(s) = (s^3+1, (s^3+1)^2)$

⇝ Άπειροι τρόποι παραμετρικοποίησης μιάς καμπύλης

Γενικά αν $\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$

$t = t(s)$ όπου $t(s)$ - γνησίως μονότονη στο $[A, B]$, $t(A) = a$, $t(B) = b$ και $t = t(s)$ είναι C^1

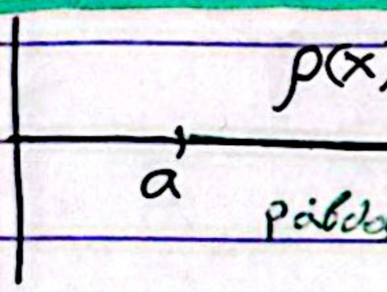
Η $\vec{\rho}(s) = \vec{\sigma}(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)))$, $A \le s \le B$ περιγράφει την ίδια καμπύλη με την $\vec{\sigma}(t)$

⇝ Κάνατε μιά παραμετρικοποίηση της καμπύλης

Παρατήρηση: Αν $t(s)$ - φθίνουσα συνάρτηση, αλλάζει ο προσανατολισμός της καμπύλης

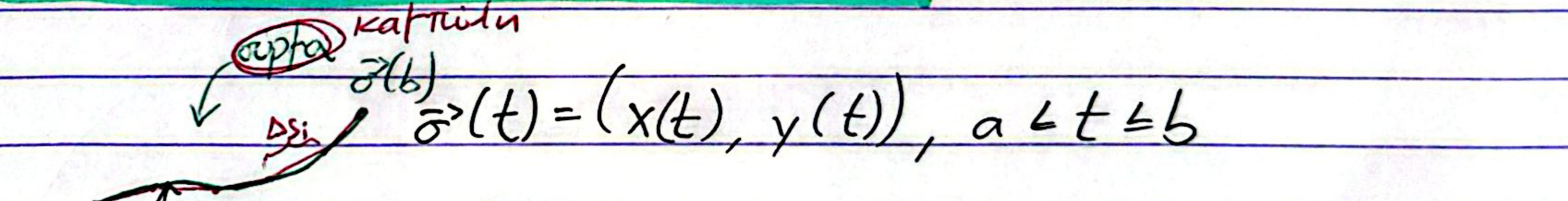
ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

$\rho(x)$ - η πυκνότητα της ράβδου στο $a \le x \le b$



ΑΠ Ι

Μάζα της ράβδου: $\int_a^b \rho(x)\,dx$



Συνολική Μάζα Σύρματος: $M = \sum_{i=1}^{n} \rho(\vec{\sigma}(t_i))\|\vec{\sigma}(t_i)\|\Delta t$

$n \to +\infty$ (Άθροισμα Riemann) $\int_a^b \rho(\vec{\sigma}(t))\|\vec{\sigma}(t)\|\,dt$

Ορισμός: Έστω $\vec{\sigma}(t)$, $a \le t \le b$ καμπύλη C^1 και f συνεχής συνάρτηση πάνω στην καμπύλη $\vec{\sigma}$.
Ορίζουμε το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** της f πάνω στη $\vec{\sigma}$:

$$\int_{\vec{\sigma}} f\,ds = \int_a^b f(\vec{\sigma}(t))\,\|\vec{\sigma}'(t)\|\,dt$$

επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί $I = \int_{\vec{\sigma}} f\,ds$ όταν $f(x,y,z) = e^{\sqrt{z}}$, $\vec{\sigma}(t) = (1, 2, t^2)$ ευθεία

$t \in [0,1]$

$$\rightsquigarrow I = \int_0^1 e^t \underbrace{\|(0,0,2t)\|}_{=\sqrt{4t^2}=2t}\,dt = 2\int_0^1 t e^t\,dt = \dots = 2$$