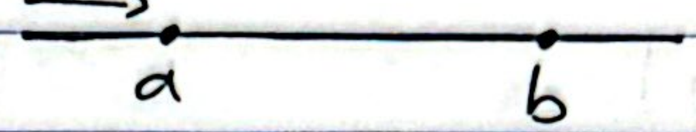
Διάλεξη 10 27/10/2026

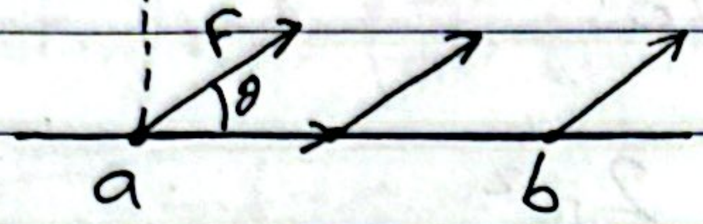
ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ (Β' ΕΙΔΟΣ)

Ολοκληρώνουμε διανυσματικά πεδία $\vec{F}$, $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ή $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

⇝ Στοιχειώδης Φυσική



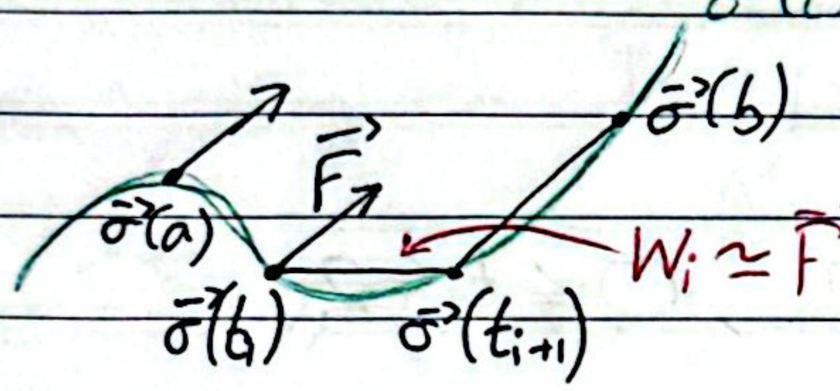
Έργο: $W = F(b-a)$



$$W = F\cos\theta(b-a) = \vec{F}(b-a)$$

Γενική Περίπτωση:

$\vec{\sigma}(t)$, $a \le t \le b$



$$W_i \simeq \vec{F}(t_i)\left(\vec{\sigma}(t_{i+1}) - \vec{\sigma}(t_i)\right) = \vec{F}(t_i)\,\vec{\sigma}'(t_i^*)\,\Delta t_i$$

$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$

$$\rightsquigarrow W \simeq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(t_i)\cdot\vec{\sigma}(t_i^*)\,\Delta t_i}_{\text{αθροίσματα Riemann}} \xrightarrow{h\to+\infty} \int_a^b F(\vec{\sigma}(t_1)\cdot\vec{\sigma}'(t)\,dt$$

Ορισμός: Έστω $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ διανυσματική συνάρτηση, συνεχής στη C^1 καμπύλη $\vec{\sigma}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$. Ορίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\sigma}(t))\cdot\vec{\sigma}'(t)\,dt$$

Παράδειγμα 1

$\vec{\sigma}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $\vec{\vec{F}}(x,y,z) = (x,y,z)$

$I = \int_{\vec{\sigma}} \vec{\vec{F}} \cdot d\vec{s} = ?$

$\vec{\sigma}'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{\vec{F}} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (\sin t, \cos t, t) \cdot (\cos t, -\sin t, 1)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t \cos t - \cos t \sin t + t)\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2$$

Παράδειγμα 2

$\vec{\vec{F}} = x\vec{i} - y\vec{j} + (x+y+z)\vec{k}$

Η καμπύλη: $x = t$, $y = 3t^2$, $z = 0$, $0 \le t \le 2$

$\int_{\vec{\sigma}} \vec{\vec{F}} \cdot d\vec{s} = ?$

$\vec{\sigma}(t) = (t, 3t^2, 0)$

$\vec{\sigma}'(t) = (1, 6t, 0)$

$\vec{\vec{F}}(\vec{\sigma}(t)) = (t, -3t^2, t + 3t^2)$

$$\rightsquigarrow \int_0^2 \vec{\vec{F}}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)\, dt = \int_0^2 (t, -3t^2, t+3t^2) \cdot (1, 6t, 0)\, dt =$$

$$= \int_0^2 (t - 18t^3)\, dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{9}{2}t^4\right]_0^2 = 2 - 72 = -70$$

$\rightsquigarrow$ Αν $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, τότε άλλος τρόπος γραφής του $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

είναι $\int_{\vec{\sigma}} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$, $\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\vec{\sigma}'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

Μυνηλονικός Κανόνας: $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot \vec{\sigma}'\,dt =$

$= \int (F_1, F_2, F_3)\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) dt = \int_{\vec{\sigma}} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$

Παράδειγμα 3

Αν $\vec{\sigma}(t) = (t, t^2, 1)$, $0 \le t \le 1$

Υπολογίστε το $I = \int_{\vec{\sigma}} x^2\,dx + xy\,dy + dz$

$\rightsquigarrow \vec{F}(x, y, z) = (x^2, xy, 1)$

$$I = \int_0^1 \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)\,dt = \int_0^1 (t^2, t^3, 1) \cdot (1, 2t, 0)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (t^2 + 2t^4)\,dt = \frac{11}{15}$$

Άλλος τρόπος

$$\int_{\vec{\sigma}} x^2\,dx + xy\,dy + dz = \int_0^1 t^2\,dt + t^3(2t)\,dt = \int_0^1 (t^2 + 2t^4)\,dt$$

$dx = x'(t)\,dt$

$dy = y'(t)\,dt$

$dz = z'(t)\,dt = 0$

Παράδειγμα 4

$$I = \int_{\vec{\sigma}} \cos z\,dx + e^x\,dy + e^y\,dz \quad , \vec{\sigma}(t) = (1, t, e^t) \quad , 0 \le t \le 2$$

Με τον 1ο τρόπο

$$I = \int_0^2 \left(\cos e^t \cdot 0 + e^1 \frac{dt}{dt} + e^t \frac{d(e^t)}{dt} \right) dt =$$

$$= \int_0^2 (e + e^{2t})\,dt = \cdots = 2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$$

2 διαφορετικοί τύποι αλλά η ίδια εικόνα

ΑΝΑΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

$h: I \to I$, C^1 και (1-1) υποχρεωτικά ίδιοτομή $I, I, \subset \mathbb{R}$

$I = [a, b] \to [a, b] = I$

Αν $\vec{\sigma}(s): I \to \mathbb{R}^3$ τότε η $\vec{\rho}(t) = \vec{\sigma}(h(t)): I \to \mathbb{R}^3$ λέγεται

αναπαραμετρικοποίηση της $\vec{\sigma}$

Η καμπύλη έχει ίδια, ο τύπος αλλάζει

→ Μπορεί να αλλάξει ο προσανατολισμός της καμπύλης

φορά διαγραφής

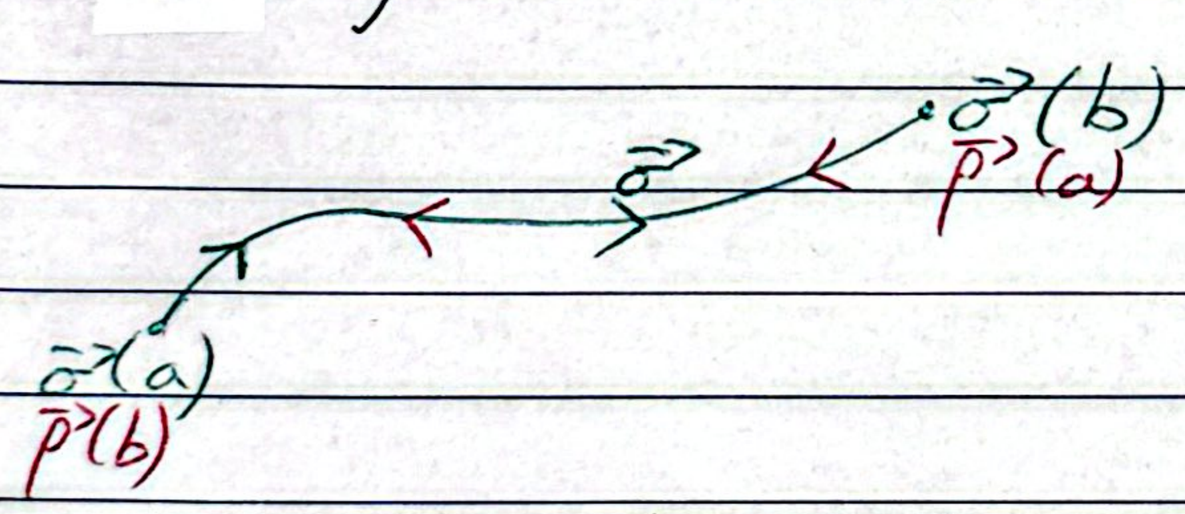
Παράδειγμα

Έστω $\vec{\sigma}: [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $h: [a, b] \to [a, b]$

$h(t) = a + b - t$

Αναπαραμετρικοποίηση: $\vec{\rho}(t) = \vec{\sigma}(h(t))$

Τώρα $\vec{\rho}(a) = \vec{\sigma}(h(a)) = \vec{\sigma}(b)$ και $\vec{\rho}(b) = \vec{\sigma}(a)$



∴ Η $\vec{\rho}(t)$ αντιστρέφει τον προσανατολισμό

Παρατήρηση: Αν $g(t) = a + b + t$, $g: [a, b] \to [2a + b, a + 2b]$

Τώρα η $\vec{\tau}(t) = \vec{\sigma}(g(t))$ κρατάει τον προσανατολισμό

Διάλεξη 11 | 29/10/2026

ΑΝΑΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ (Συνέχεια)

$h: I \to I_1$, 1-1, $I=[a,b] \to [a_1,b_1]=I_1$

Αν $\vec{\sigma}(s): I_1 \to \mathbb{R}^3$ - καμπύλη, τότε:

$\vec{\rho}(t)=\vec{\sigma}(h(t)): I \to \mathbb{R}^3$ - αναπαραμετρικοποίηση της $\vec{\sigma}(s)$

Η εικόνα της καμπύλης είναι ίδια, μπορεί να αλλάξει ο προσανατολισμός

↝ Αν $h \uparrow$, δεν αλλάζει

↝ Αν $h \downarrow$, αλλάζει

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\vec{F}$ - διανυσματικό πεδίο, συνεχές πάνω σε καμπύλη $\vec{\sigma}(s)$, C'

$\vec{\sigma}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ και έστω $\vec{\rho}(t)=\vec{\sigma}(h(t))$, $\vec{\rho}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ - μια αναπαραμετρικοποίηση της $\vec{\sigma}$. Τότε:

$$\int_{\vec{\rho}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \begin{cases} \int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\cdot d\vec{s} & \text{αν } \vec{\rho} \text{ διατηρεί τον προσανατολισμό} \\ -\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\cdot d\vec{s} & \text{αν } \vec{\rho} \text{ δε διατηρεί τον προσανατολισμό} \end{cases}$$

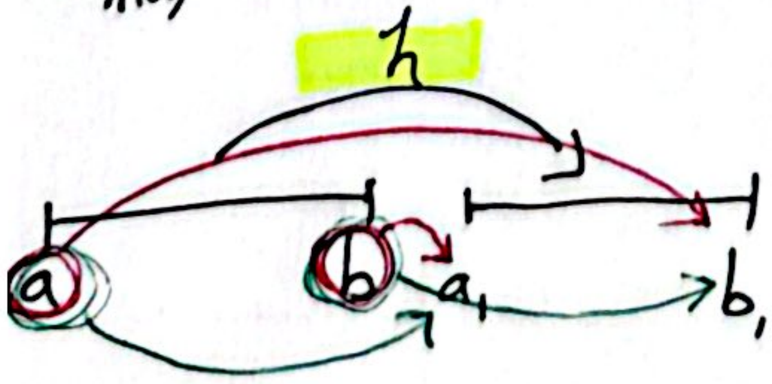
Απόδειξη

$\vec{\sigma}(s)$ ~~ds~~ — παράγωγος που κινείται στο d/ds

$$\int_{\vec{\rho}} \vec{F}\cdot d\vec{s} \overset{\text{ορισμ}}{=} \int_a^b \vec{F}(\vec{\rho}(t))\vec{\rho}'(t)\,dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{\sigma}(h(t)))\cdot \vec{\sigma}'(h(t))h'(t)\,dt$$

↝ Αλλαγή Μεταβλητής: $s=h(t)$

$$\rightsquigarrow \int_{h(a)}^{h(b)} \vec{F}(\vec{\sigma}(s))\vec{\sigma}'(s)\,ds = \begin{cases} \int_{a_1}^{b_1} \vec{F}(\vec{\sigma}(s))\vec{\sigma}'(s)\,ds = \int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\cdot d\vec{s} & \text{Αν } h \text{ - αύξουσα} \rightsquigarrow h(a)=a_1,\ h(b)=b_1 \\ & (\vec{\rho} \text{ κρατάει προσανατολισμό}) \\ \int_{b_1}^{a_1} \vec{F}(\vec{\sigma}(s))\vec{\sigma}'(s)\,ds = -\int_{a_1}^{b_1} \vec{F}(\vec{\sigma}(s))\vec{\sigma}'(s)\,ds = -\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\cdot d\vec{s} & \text{Αν } h \text{ - φθίνουσα} \rightsquigarrow h(a)=b_1,\ h(b)=a_1 \\ & (\vec{\rho} \text{ αλλάζει προσανατολισμό}) \end{cases}$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 2 (για επικαμπύλια β' είδους)

Έστω $\vec{\sigma}, \vec{\rho}, h$ όπως στο προηγούμενο θεώρημα και f - συνεχής πάνω στη $\vec{\sigma}$. Τότε:

$$\int_{\vec{\sigma}} f(x,y,z)\,ds = \int_{\vec{\rho}} f(x,y,z)\,ds$$

Απόδειξη

$$\int_{\vec{\rho}} f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\vec{\sigma}(h(t)))\,\underbrace{\|\vec{\sigma}'(h(t))\|\,|h'(t)|}_{\|\vec{\rho}'(t)\| = \|\vec{\sigma}'(h(t))\cdot h'(t)\|}\,dt$$

Αν $h'(t) > 0$ (δηλ. $h \uparrow$) για $s = h(t) \rightsquigarrow$

$$\int_{\vec{\rho}} f\,ds = \int_{\substack{h(a)=a_1 \\ h(b)=b_1}} f(\vec{\sigma}(s))\,\|\vec{\sigma}'(s)\|\,ds = \int_{\vec{\sigma}} f\,ds$$

Αν $h'(t) < 0$ (δηλ. $h \downarrow$) για $s = h(t) \rightsquigarrow$

$$\int_{\vec{\rho}} f\,ds = -\int_{\substack{h(a)=b_1 \\ h(b)=a_1}} f(\vec{\sigma}(s))\,\|\vec{\sigma}'(s)\|\,ds = \int_{a_1}^{b_1} f(\vec{\sigma}(s))\,\|\vec{\sigma}'(s)\|\,ds =$$

$$= \int_{\vec{\sigma}} f\,ds$$

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι C^1 και $\vec{\sigma}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ - καμπύλη C^1 (τμηματικά C^1 είναι ok), τότε:

$$\int_{\vec{\sigma}} \nabla f \cdot d\vec{s} = f(\vec{\sigma}(b)) - f(\vec{\sigma}(a)) \quad \leftarrow \text{β' είδους}$$

Απόδειξη

$$\int_{\vec{\sigma}} \nabla f \cdot d\vec{s} \overset{\text{ορισμ.}}{=} \int_a^b \nabla f(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\vec{\sigma}(t))\,dt = f(\vec{\sigma}(b)) - f(\vec{\sigma}(a))$$

ΑΠΙΙ

$$\frac{d}{dt} f(\vec{\sigma}(t)) = \nabla f(\vec{\sigma}(t))\,\vec{\sigma}'(t)$$

(Απ' τον κανόνα της αλυσίδας)

Παράδειγμα

Έστω $\vec{\sigma}(t)=\left(\frac{t^4}{4}, \sin^3\frac{\pi t}{2}, 0\right)$, $0\le t\le 1$

Υπολογίστε το $I=\int_{\vec{\sigma}} y\,dx+x\,dy$

Ποιό είναι το διανυσματικό πεδίο που θέλουμε να ολοκληρώσουμε;

$\vec{F}(x,y,z)=(y,x,0)$

$\exists\ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ (βαθμωτή) τ.ω. $\vec{F}=\nabla f$;

$f(x,y)=xy$ | θέλουμε $f'(x)=y$ και $f'(y)=x$

δηλαδή $\vec{F}=(y,x,0)=\nabla f=\nabla(xy)$. Από το θεώρημα 3

$$\int_{\vec{\sigma}} y\,dx+x\,dy=\int_{\vec{\sigma}}\nabla f\cdot d\vec{s}=f(\vec{\sigma}(1))-f(\vec{\sigma}(0))=f\left(\tfrac{1}{4},1\right)-f(0,0)=\tfrac{1}{4}-0=\tfrac{1}{4}$$

Τα $\vec{F}$ που είναι ∇f για κάποια βαθμωτή f λέγονται **συντηρητικά πεδία** και έχουν πολύ καλές ιδιότητες όπως αυτές του θεωρήματος 3

Πχ Είναι το πεδίο $\vec{F}(x,y)=\underbrace{(x+y)}_{F_1}\vec{i}+\underbrace{(x-y)}_{F_2}\vec{j}$ συντηρητικό;

(Δηλαδή $\exists\ f(x,y)$ τ.ω. $\vec{F}=\nabla f$;)

Θέλουμε $F_1=\frac{\partial f}{\partial x}$ και $F_2=\frac{\partial f}{f_y}$

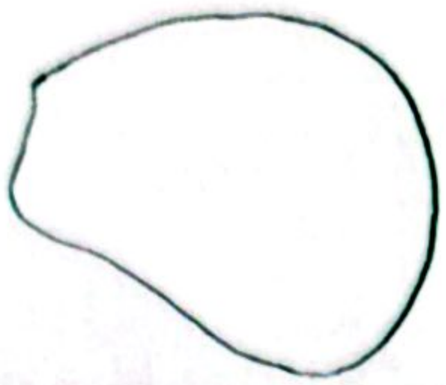
$$\rightsquigarrow x+y=\frac{\partial f}{\partial x}\Rightarrow \frac{1}{2}x^2+xy+c(y)=f(x,y)$$

$$\rightsquigarrow x-y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2+xy+c(y)\right)=x+c'(y)\Rightarrow x-y=x+c'(y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(y)=-y\Rightarrow c(y)=-\frac{1}{2}y^2+c$$

$$\therefore f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2(+c)$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x}=x+y \text{ και } \frac{\partial f}{\partial y}=x-y$$



Κλειστή και απλή καμπύλη

Τα άκρα της κλείνουν

δεν τέμνει τον εαυτό της



Κλειστή και όχι απλή καμπύλη



Όχι κλειστή και απλή καμπύλη

Προσοχή:

$\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t),\ 0 \le t \le 2\pi$

$\vec{u}(t) = (\cos 2t, \sin 2t),\ 0 \le t \le 2\pi$

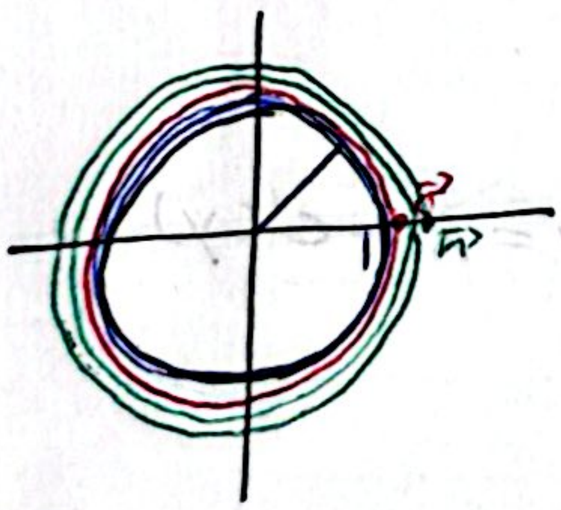
} Μοναδιαίος κύκλος

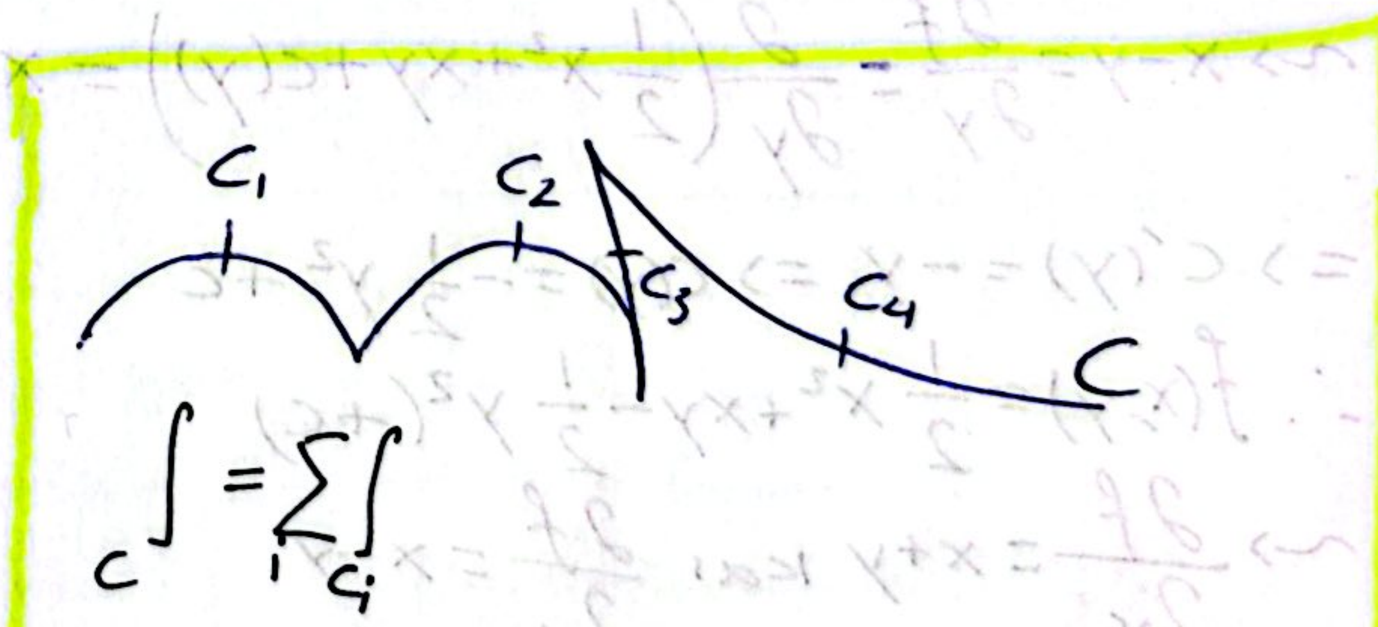
$\vec{F} = (y, 0)$

Για να είχατε αναπαραστήσει 2α είχατε $0 \le t \le \pi$, τώρα ΔΕΝ είναι 1-1

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\sigma}(t))\vec{\sigma}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (\sin t, 0)(-\sin t, 0)\, dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\, dt = \cdots = -\pi$$

$$\int_{\vec{u}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \cdots = -2\pi$$ // $\vec{u}$ περιγράφει 2 φορές τον κύκλο





Για να ∃ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αρκεί η C να είναι τμηματικά C^1

Ελένη Σταματάκη