Μεταβολικός χαρακτηρισμός 1ης ιδιοτιμής για συμμετρικούς L.

U ανοικτό, ομαλό, φραγμένο συνεκτικό, και

$$(*) \quad Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j}$$

όπου $a^{ij} \in C^\infty(\bar{U})$, ομοιόμορφα ελλειπτικός.

Ο L είναι <u>συμμετρικός</u>: $B[u,v] = B[v,u]$

Τότε έχουμε:

<u>Θ1</u>| Οι ιδιοτιμές του L είναι πραγματικές και

$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \qquad \lambda_k \to \infty.$

Υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ του $L^2(U)$ όπου $w_k \in H_0^1(U)$ και ιδιοτιμή λ_k τ.ω.

$$\left.\begin{aligned} Lw_k &= \lambda_k w_k, & U \\ w_k &= 0, & \partial U \end{aligned}\right\}.$$

<u>Απόδ.</u>| Ο $S = L^{-1}$ είναι φραγμένος, γραμμικός, συμπαγής, συμμετρικός $S : L^2(U) \longrightarrow L^2(U)$, (βλ. Evans για τα υπόλοιπα).

<u>N.b.</u>: Ο L ικανοποιεί και την Coercivity (για $\gamma = 0$): Πράγματι, λόγω ελλειπτικότητας:

$\theta \int |Du|^2 \leq B[u,u]$. Άρα ο L^{-1} υπάρχει.

Απλή ειδική περίπτωση: $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$

όποτε $Lu = -\Delta u$ και $B[u,v] = \int_U Du \cdot Dv$.

<u>Λήμμα 1</u>. Έστω $\lambda = \inf\limits_{\substack{u \in H_0^1(U) \\ u \neq 0}} \dfrac{\int |Du|^2}{\int u^2}$. Τότε

$\exists\ w \in H_0^1(U)$ τ.ω. $\lambda = \dfrac{\int |Dw|^2}{\int w^2}$.

<u>Απόδ.</u> Έστω $\lambda = \inf\limits_{\substack{u \in H_0^1(U) \\ u \neq 0}} I[u]$, $I[u] = \dfrac{\int |Du|^2}{\int u^2}$.

Έστω ακολ. $\{u_k\}$, $u_k \in H_0^1(U)$ $I[u_k] \to \lambda$.

Κανονικοποιώ ώστε $\int_U u_k^2 = 1$, άρα $\int |Du_k|^2 \to 1$.

Συνεπώς $\|u_k\|_{H_0^1(U)} \le C$ και άρα υπάρχει

υπακολουθία $\{u_{k_j}\}$ (1) $u_{k_j} \xrightarrow{H^1(U)} w \in H_0^1(U)$.

(2) $u_{k_j} \xrightarrow{L^2} w$

Από (1) $\Rightarrow$

$$\int_U |Dw|^2 \le \liminf \int_U |Du_k|^2$$

$$= \lim \int_U |Du_k|^2 = \lambda.$$

Από (2) $\Rightarrow$ $\int_U w^2 = 1$.

Συνεπώς $I[w] \le \lambda$

Από τον ορισμό του λ πρέπει να έχω:

$$\lambda = I[w] = \frac{\int_U |Dw|^2}{\int_U w^2}. \qquad \square$$

<u>Λήμμα 2</u> Η $w \in H^1_0(U)$ είναι ασθενής λύση της

$$(3) \quad \begin{cases} -\Delta w = \lambda w, & U \\ w = 0, & \partial U \end{cases}$$

<u>Αποδ.</u> Έστω $\varphi \in C_c^\infty(U)$ τυχαία. Τότε έχω ότι

$$I[w+\varepsilon\varphi] \geq I[w] \quad \forall \varepsilon \geq 0, \text{ άρα}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[w+\varepsilon\varphi]\Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[w+\varepsilon\varphi] = \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\int |D(w+\varepsilon\varphi)|^2}{\int (w+\varepsilon\varphi)^2} = \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\int |Dw|^2 + 2\varepsilon \int Dw\, D\varphi + \varepsilon^2 \int |D\varphi|^2}{\int w^2 + 2\varepsilon \int w\varphi + \varepsilon^2 \int \varphi^2}$$

$$= \frac{\left(2\varepsilon \int |D\varphi|^2 + 2\int Dw\, D\varphi\right) \cdot \int (w+\varepsilon\varphi)^2 - \left(2\varepsilon \int \varphi^2 + 2\int w\varphi\right) \int |D(w+\varepsilon\varphi)|^2}{\left(\int (w+\varepsilon\varphi)^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\varepsilon} I[w+\varepsilon\varphi]\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{2\left(\int Dw \cdot D\varphi\right) \int w^2 - 2\left(\int w\varphi\right) \cdot \int |Dw|^2}{\int w^2}$$

Συνεπώς:

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[w+\varepsilon\varphi]\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\int w^2\right)\int Dw\cdot D\varphi - \left(\int |Dw|^2\right)\int w\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int Dw\cdot D\varphi - \frac{\int |Dw|^2}{\int w^2}\int w\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_U Dw\cdot D\varphi = \lambda \int_U w\varphi \ , \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(U).$$

$$\Leftrightarrow \quad B[w,\varphi] = (\lambda w, \varphi)_{L^2} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(U).$$

Ισχυριζόμαστε ότι η παραπάνω ισχύει $\forall v \in H_0^1(U)$.
Πράγματι αν $v \in H_0^1(U)$, $\exists\ \varphi_k \in C_c^\infty(U)$ τ.ω.

$$\varphi_k \xrightarrow{H_0^1(U)} v.$$

Τότε όμως:

$$(4) \qquad \int_U Dw\cdot D\varphi_k\,dx \longrightarrow \int Dw\cdot Dv\,dx$$

$$(5) \qquad \int_U w\varphi_k\,dx \longrightarrow \int wv\,dx$$

Ας δείξουμε την (4): $\left|\int Dw\,(D\varphi_k - Dv)\,dx\right| \leq$

$$\leq \left(\int |Dw|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\int |D\varphi_k - Dv|^2\right)^{1/2} \leq C\,\|Dw\|_{L^2}\cdot\|\varphi_k - v\|_{H_0^1(U)} \to 0$$

Παρομοίως αποδεικνύεται και η (5). Έχουμε ήδη δείξει ότι:

$$\int_U Dw\cdot D\varphi_k\,dx = \lambda\int_U w\cdot\varphi_k\,dx \ , \quad \forall \varphi_k \in C_c^\infty(U)$$

Παίρνοντας όρια και χρησιμοποιώντας τις (4) & (5):

$$\int_U Dw \cdot Dv \, dx = \lambda \int_U w v \, dx , \quad v \in H_0^1(U)$$

συνεπώς η w είναι ασθενής λύση της (3). $\square$

Λήμμα 3: Αν λ, w όπως πριν τότε $\lambda = \lambda_1$ η μικρότερη ιδιοτιμή και $w = w_1$ η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση.

Απόδ. Έστω (λ_k, w_k) ιδιοτιμή – ιδιοσυνάρτηση. Τότε $-\Delta w_k = \lambda_k w_k$ οπότε πολ/ζοντας με w_k

$$\lambda_k = \frac{\int |Dw_k|^2}{\int w_k^2} = I[w_k].$$

Επειδή $Lw = \lambda w$, U; $w = 0$, ∂U το λ είναι ιδιοτιμή και επειδή το λ είναι το ελάχιστο δυνατό της $I[u]$, η λ πρέπει να είναι η μικρότερη ιδιοτιμή $\lambda = \lambda_1$ και $w = w_1$ $\square$

Παρατήρηση: Από θεωρία ομαλότητας έχουμε ότι $w_k \in C^\infty(U)$ $\forall\, k = 1, 2, \ldots$

Λήμμα 4 Η w_1 δεν αλλάζει πρόσημο και είναι απλή.

Απόδ. Κανονικοποιώ $\|w_1\|_{L^2}=1$. Επειδή $w_1 \in H_0^1(U)$ $w_1^+, w_1^- \in H_0^1(U)$. Οπότε:

$$\lambda_1 = \int_U |\nabla w_1|^2 = \int_U |\nabla w_1^+ + \nabla w_1^-|^2 = \int_U |\nabla w_1^+|^2 + \int_U |\nabla w_1^-|^2$$

$$\geq \lambda_1 \int (w_1^+)^2 + \lambda_1 \int (w_1^-)^2 = \lambda_1 \int_U w_1^2 = \lambda_1 .$$

Για να συμβαίνει αυτό, υποχρεωτικά έχω ότι

$$\int |\nabla w_1^+|^2 = \lambda_1 \int (w_1^+)^2 \quad \& \quad \int |\nabla w_1^-|^2 = \lambda_1 \int (w_1^-)^2$$

δηλ. $\lambda_1 = \dfrac{\int |\nabla w_1^+|^2}{\int w_1^{+2}} = \dfrac{\int |\nabla w_1^-|^2}{\int (w_1^-)^2}$.

Συνεπώς w_1^+ και w_1^- είναι ιδιοσυναρτήσεις στην ιδιοτιμή λ_1, δηλ.

$$\begin{cases} L w_1^{\pm} = \lambda_1 w_1^{\pm}, & U \\ w_1^{\pm} = 0, & \partial U \\ w_1^+, w_1^- \in C^\infty(\bar U). \end{cases}$$

Από αρχή μεγίστου, επειδή $u_+ \geq 0$

$w_1^+ > 0$ ή $w_1^+ \equiv 0$ στο U.

και παρόμοια $w_1^- > 0$ ή $w_1^- \equiv 0$ —//—

Οπότε είτε $w_1 = w_1^+$ ή $w_1 = w_1^-$. Δηλαδή έχει σταθερό πρόσημο.

Έστω ότι έχω 2 ιδιοσυναρτήσεις στην ιδιοτιμή λ_1, τις $w_1 > 0$, $\tilde{w}_1 > 0$.

Για κατάλληλη σταθερά c $\left(= \dfrac{\int_U w_1}{\int_U \tilde{w}_1} > 0 \right)$

έχω ότι $$\int_U (w_1 - c\tilde{w}_1)\, dx = 0$$

Όμως η συνάρτηση $w_1 - c\tilde{w}_1$ είναι επίσης ιδιοσυνάρτηση στην ιδιοτιμή λ_1 και αναγκαστικά έχει σταθερό πρόσημο ή είναι $\equiv 0$. Από την παραπάνω σχέση $\Rightarrow$ $w_1 = c\tilde{w}_1$. Άρα η λ_1 είναι απλή ιδιοτιμή. $\square$

Βάζοντας τα 4 λήμματα μαζί έχουμε δείξει:

Θ1 Έστω
$$-\Delta u = \lambda u \text{ στο } U$$
$$u = 0, \text{ στο } \partial U.$$
πρόβλημα ιδιοτιμών. Τότε η πρώτη ιδιοτιμή λ_1 ικανοποιεί
$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(U) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\int_U |Du|^2}{\int_U u^2} = \frac{\int_U |Dw_1|^2}{\int_U w_1^2}, \quad w_1 \in H_0^1(U)$$

όπου w_1 η πρώτη ιδιοσυνάρτηση. Η w_1 είναι απλή ιδιοσυνάρτηση (στην ιδιοτιμή λ_1) και κρατάει σταθερό πρόσημο.

Τά ίδια αποτελέσματα μέ τον Θ1 ισχύουν καί στην περίπτωση που ο τελεστής $-\Delta u$ αντικατασταθεί μέ τόν (συμμετρικό) τελεστή Lu στη (*) στην σελ. 1. (Βλ. φυλλάδιο 4 Ασκήσεων ή Evans Θ.2 στην § 6.5.1).

Είναι πολύ ενδιαφέρον ότι παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν καί όταν ό τελεστής <u>δεν</u> είναι συμμετρικός:

Έστω:
$$Lu = -\sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_i b_i u_{x_i} + cu$$

όπου $a_{ij}, b_i, c \in C^\infty(\bar{U})$, U ανοικτό, φραγμένο, συνεκτικό καί ∂U ομαλό. Ακόμη <u>$c \geq 0$.</u> Τότε:

<u>Θ</u> | Ο L έχει την πρώτη ιδιοτιμή πραγματική καί $\mathrm{Re}\,\lambda > \lambda_1$ γιά κάθε άλλη ιδιοτιμή. Η λ_1 είναι απλή καί ή αντίστοιχη (πρώτη) ιδιοσυνάρτηση w_1 είναι θετική στο U.

Η απόδειξη είναι ιδιαίτερα τεχνική και δέ θά μάς απασχολήσει. Είναι πάντως στον Evans: <u>§ 6.5.2, Θ3.</u>