Υπενθύμιση από Γραμμ. Άλγεβρα :

(1) $\quad Ax = b, \quad A: n\times n, \; x \in \mathbb{R}^n, \; b \in \mathbb{R}^n.$

Είτε :

(α) η (1) έχει μοναδική λύση $\forall\, b \in \mathbb{R}^n$

ή (β) Το ομογενές πρόβλημα $Ax = 0$ έχει $\neq 0$ λύση.

Στην περίπτωση (β) το (1) έχει λύση αν και μόνον εάν $b \perp N(A^T)$.

Συμπαγής τελεστές σε χώρους Hilbert :

Έστω $K : H \longrightarrow H$ συμπαγής ($\dim H = +\infty$). Τότε ο K έχει είτε πεπ. πλήθος ιδιοτιμών είτε άπειρο και $\lambda_n \to 0$.

Επίσης : K συμπαγής, $u, f \in H$

(2) $\quad (I - K)u = f$

Είτε : (α) Η (2) έχει μοναδική λύση $\forall\, f \in H$

ή (β) η $(I-K)u = 0$ έχει μη μηδενική λύση

Στην περίπτωση (β) το (1) έχει λύση αν και μόνον εάν $f \perp N(I - K^*)$.

Έστω το γ από Θ3. Έστω ότι το

$$L_\gamma u := Lu + \gamma u = g \in L^2$$

και έχει μοναδική λύση u τ.ω.

όπου $B_\gamma[u,v] = B[u,v] + \gamma(u,v)_{L^2} = (g,v)_{L^2} \quad \forall v \in L^2(U)$

Συμβολίζω τη λύση με: $u = L_\gamma^{-1} g$

ο τελεστής $L_\gamma^{-1} : L^2(U) \longrightarrow L^2(U) \subset H_0^1(U)$

Είναι συμπαγής: Πράγματι:

$$\beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \le B_\gamma[u,u] = (g,u)_{L^2} \le \|g\|_{L^2} \cdot \|u\|_{H_0^1(U)}$$

$$\Rightarrow \quad \|L_\gamma^{-1} g\|_{H_0^1(U)} = \|u\|_{H_0^1(U)} \le C\|g\|_{L^2(U)}$$

Από Rellich Kondrachov ο L_γ^{-1} είναι συμπαγής. ∎

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το Π.Σ.Τ.

$$(3) \quad \begin{cases} Lu = \lambda u + f, & U \\ u = 0, & \partial U \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λήμμα Έστω $f \in L^2(U)$. Η συνάρτηση $u \in L^2(U)$ είναι ασθενής λύση του (3) εάν και μόνον εάν:

$$(I-K)u = h \,, \quad \text{όπου} \quad K = (\gamma+\lambda)L_\gamma^{-1} \,, \quad h = L_\gamma^{-1} f$$

Απόδ. (i) Έστω u ασθενής λύση της (3). Άρα $u \in H_0^1(U)$ και

$$B_\gamma[u,v] = B[u,v] + \gamma(u,v)_{L^2} = ((\gamma+\lambda)u + f, v)_{L^2}$$

$$\Rightarrow u = L_\gamma^{-1}((\gamma+\lambda)u + f) = (\gamma+\lambda)L_\gamma^{-1}u + L_\gamma^{-1}f = Ku + h$$

(ii) Έστω ότι ισχύει

$$u - (\gamma+\lambda)L_\gamma^{-1}u = L_\gamma^{-1} f \Rightarrow u = L_\gamma^{-1}((\gamma+\lambda)u + f)$$

Τότε όμως:

$$B[u,v] = B_\gamma[u,v] - \gamma(u,v)_{L^2} = ((\gamma+\lambda)u + f, v)_{L^2} - \gamma(u,v)_{L^2} = (\lambda u + f, v)_{L^2}$$

$\Rightarrow$ u ασθενής λύση της (3) $\square$

Στη συνέχεια έχουμε για το πρόβλημα (3):

Θ4 (i) Υπάρχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος $\Sigma \subset \mathbb{R}$ για το οποίο το ΠΣΤ (3) έχει μοναδική λύση $\forall f \in L^2(U)$ αν και μόνον εάν $\lambda \notin \Sigma$.

(ii) Αν $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ (άπειρο) τότε

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \quad \lambda_k \to +\infty .$$

Ορ. Τα $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ λέγονται ιδιοτιμές του L.

<u>Απόδειξη Θ4</u> : Από Λήμμα το (3) έχει λύση αν και μόνον εάν έχει λύση το

(4) $(I-K)u=h$, $K=(\gamma+\lambda)L_\gamma^{-1}$, $h=L_\gamma^{-1}f$.

Από Fredholm το (4) έχει λύση $\forall h\in L^2$ αν και μόνον αν το

$(I-K)u=0$ έχει μοναδική λύση την $u=0$

$u=Ku \iff u=(\gamma+\lambda)L_\gamma^{-1}u \iff L_\gamma^{-1}u=\frac{1}{\gamma+\lambda}u$

Ο L_γ^{-1} είναι συμπαγής. Αν $u=0$ είναι η μοναδική λύση τότε το $\mu=\frac{1}{\gamma+\lambda}$ <u>δεν</u> είναι ιδιοτιμή.

Επομένως αν $\{\mu_k\}$ οι ιδιοτιμές του L_γ^{-1} αρκεί $\frac{1}{\gamma+\lambda}\neq\mu_k \iff \lambda\neq\frac{1}{\mu_k}-\gamma=:\lambda_k$

Μπορεί να υποθέσω ότι $\lambda+\gamma>0 \iff \lambda>-\gamma$

Αν $\lambda+\gamma\leq 0 \iff -\lambda\geq\gamma$

τότε (3) $\iff \left\{\begin{array}{ll} Lu-\lambda u=f , & U \\ u=0 & \partial U \end{array}\right\}$

και επειδή $\overline{\text{από Θ3}}$ $-\lambda\geq\gamma$ έχω μοναδική λύση $\forall f\in L^2(U)$.

οπότε $0<\mu_k\to 0 \Rightarrow \lambda_k\to+\infty$

05 Αν $\lambda \notin \Sigma$, $\exists\, C>0$ τ.ω. $(f \in L^2(U))$

$$\|u\|_{L^2(U)} \le C\|f\|_{L^2(U)}$$

όπου $u \in H_0^1(U)$ η μοναδική ασθενής λύση του

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f, & U \\ u = 0 & \partial U. \end{cases}$$

$C = C(\lambda, U, L)$.

Απόδ. Έστω όχι. Τότε $\exists \{f_k\}, \{u_k\}$ με $\begin{cases} Lu_k = \lambda u_k + f_k, & U \\ u_k = 0 & , \partial U \end{cases}$

τ.ω. $\|u_k\|_{L^2(U)} > k\|f_k\|_{L^2(U)}$ $\quad k = 1, 2, \dots$

Κανονικοποιούμε $\|u_k\|_{L^2} = 1 \Rightarrow \|f_k\| \longrightarrow 0$.

Τώρα $\{u_k\}$ είναι φραγμένη στην $H_0^1(U)$ (*). Άρα $\exists$ υπακολ.

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \quad \text{στην } H_0^1(U)$$
$$u_{k_j} \to u \quad L^2$$

$\Rightarrow$ u ασθενής λύση του $Lu = \lambda u$

(*) $\beta\|u_k\|^2_{H^1} \le B[u_k, u_k] + \gamma\|u_k\|_{L^2} = (f, u_k)_{L^2} + C\|u_k\|^2_{L^2}$

$$\le \|f\|_{L^2}\|u_k\|_{L^2} + C\|u_k\|^2_{L^2} = \|f\|_{L^2} + C.$$