ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Δευτέρα 23 Μαρτίου 2020

Διδάσκων: Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ – Ασθενείς λύσεις

Φυλλάδιο 3

1. Δίδονται οι ακολουθίες ($n = 1, 2, \ldots.$)

$$
\begin{aligned}
u_{1n}(x) &= x^2 \sin(nx), && x \in U_1 = (0, 2\pi)\ , \\
u_{2n}(x) &= \begin{cases} n^{\frac{1}{2}}, & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases} && x \in U_2 = [-1, 1]\ , \\
u_{3n}(\vec{x}) &= \eta(\vec{x} - n\vec{e}_1), && \vec{x} \in U_3 = \mathbf{R}^n\ ,
\end{aligned}
$$

όπου $\eta(\vec{x})$ η συνάρτηση ομαλοποιητής απο Evans, Appendix C.4 και $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$.

Δείξτε οτι ολες οι παραπάνω ακολουθίες συγκλίνουν ασθενώς στο 0 στον $L^2(U_i)$ αλλά όχι ισχυρά. Υπολογίστε τα

$$\liminf \|u_{in}\|_{L^2(U_i)}, \qquad i = 1, 2, 3\ .$$

2. Εστω $U \subset \mathbf{R}^n$ φραγμένο χωρίο με ομαλό σύνορο και ακολουθία u_j η οποία συγκλίνει ασθενώς στον $H^1(U)$, δηλ. $u_j \rightharpoonup u \in H^1(U)$.

(1) Δείξτε οτι $u_j \rightharpoonup u$ στον $L^2(U)$.

(2) Δείξτε οτι $\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u$ στον $L^2(U; \mathbf{R}^n)$, δηλ. οτι

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(U), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

(3) Δείξτε οτι

$$\int_U |\nabla u|^2 dx \leq \liminf \int_U |\nabla u_j|^2 dx\ .$$

(4) Δείξτε οτι $u_j \to u$ ισχυρά στον $L^2(U)$.

3. Η συνάρτηση $u \in H_0^2(U)$ είναι ασθενής λύση για την δι-αρμονική εξίσωση

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & x \in U, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, & x \in \partial U, \end{cases} \tag{1}$$

εφόσον

$$\int_U \Delta u \Delta v dx = \int_U f v dx, \qquad \forall v \in H_0^2(U).$$

Με χρήση του Θεωρήματος Lax Milgram δείξτε οτι αν $f \in L^2(U)$ το (1) έχει μοναδική ασθενή λύση.

4. Έστω U φραγμένο, ομαλό, συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ και $1 < p < +\infty$. Δείξτε οτι υπάρχει θετικη σταθερά C που εξαρτάται μόνο από τα $n,\ p,\ U$ τ. ω.

$$\Big\| u - \frac{1}{|U|} \int_U u\ dx \Big\|_{L^p(U)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)}, \qquad \forall u \in W^{1,p}(U).$$

Αυτή είναι μία μορφή της ανισότητας Poincare. Η απόδειξη είναι στον Evans, παράγραφος 5.8.1.

5. Έστω U συνεκτικό . Η συνάρτηση $u \in H^1(U)$ είναι ασθενής λύση για το πρόβλημα Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & x \in U, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, & x \in \partial U, \end{cases} \tag{2}$$

εφόσον

$$\int_U Du \cdot Dv\ dx = \int_U f v\ dx, \qquad \forall v \in H^1(U).$$

(1) Έστω $V = \{v \in H^1(U) : \ \int_U v dx = 0\}$. Δείξτε οτι ο V με το εσωτερικό γινόμενο του $H^1(U)$ είναι χώρος Hilbert.

(2) Δείξτε οτι το (2) έχει ασθενή λύση αν και μόνον εαν

$$\int_U f dx = 0.$$

(3) Τι μπορούμε να πούμε για τη μοναδικότητα των λύσεων του προβλήματος (2);