ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πεμπτη 9 Απριλίου 2020

Διδάσκων: Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ – Ασθενείς λύσεις

Φυλλάδιο 4

1. Εστω $U \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό, συνεκτικό, ομαλό και φραγμένο χωρίο. Ο L είναι συμμετρικός και ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής στο U και έστω $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ οι 3 πρώτες ιδιοτιμές του και w_i, $i = 1, 2, 3$ ιδιοδιανύσματα, όπου το w_i αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Ελέγξετε κατα πόσον το πρόβλημα

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda u + f, \qquad x \in U, \\ u &= 0, \qquad x \in \partial U, \end{aligned}$$

(α) έχει λύση (β) η λύση είναι είναι μοναδική (γ) Ισχύει η σχέση $\|u\|_{L^2(U)} \le C\|f\|_{L^2(U)}$ με C ανεξάρτητη του u στις παρακάτω περιπττώσεις (a, b, c είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές):

(i) $\lambda = \lambda_2, \qquad f \in L^2(U)$,

(ii) $\lambda = \lambda_2, \qquad f = aw_1 + cw_3$,

(iii) $\lambda = -1 + \lambda_1, \qquad f = aw_1 + bw_2$,

(iv) $\lambda = -2 + \lambda_1, \qquad f \in L^2(U)$,

(v) $\lambda = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \qquad f = \frac{w_1+w_2}{2}$.

2. Εστω $U \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό, συνεκτικό, ομαλό και φραγμένο χωρίο και

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (\alpha_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j}.$$

Τα $\alpha_{ij} \in C^\infty(\bar{U})$ είναι συμμετρικά και ικανοποιούν την ομοιόμορφη συνθήκη ελειπτικότητας. Η $B[u, v]$ είναι η διγραμμική μορφή του τελεστή L και

$$\lambda_1 = \inf\{B[u, u] : \ u \in H_0^1(U), \ \|u\|_{L^2(U)} = 1\}.$$

(i) Έστω η ακολουθία $u_n \in H_0^1(U)$ για την οποία γνωρίζουμε οτι

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \ \text{ στον } \ L^2(U), \\ \nabla u_n &\rightharpoonup \nabla u \ \text{ στον } \ L^2(U, \mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

Ξεκινώντας απο τη συνθήκη ελλειπτικότητας

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_U \alpha_{ij}(u_n - u)_{x_j}(u_n - u)_{x_i}\, dx \ge \theta \int_U |\nabla(u_n - u)|^2\, dx,$$

δείξτε ότι

$$B[u,u] \leq \liminf B[u_n, u_n].$$

(ii) Δείξτε οτι υπάρχει συνάρτηση $w_1 \in H_0^1(U)$ με $\|w_1\|_{L^2(U)} = 1$ τ.ω.

$$\lambda_1 = B[w_1, w_1].$$

(iii) Δείξτε οτι η λ_1 είναι η πρώτη ιδιοτιμή και η w_1 η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση του τελεστή L.

(iv) Δείξτε οτι η w_1 είναι απλή και δεν αλλάζει πρόσημο.

Υποδ. Εργαστείτε όπως ακριβώς κάναμε στη περίπτωση όπου $L = -\Delta$.

3. Το χωρίο U και ο τελεστής L είναι ακριβώς όπως στην άσκηση 2. Έστω $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ οι ιδιοτιμές του L και $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ οι ιδιοσυναρτήσεις του L κανονικοποιημένες ωστε να αποτελούν μία ορθοκανονική βάση του $L^2(U)$.

(i) Δείξτε οτι το $B[\cdot,\cdot]$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $H_0^1(U)$.

(ii) Εφοδιάζουμε τον $H_0^1(U)$ με το εσωτερικό γινόμενο $B[\cdot,\cdot]$. Δείξτε οτι με αυτό το εσωτερικό γινόμενο οι συναρτήσεις

$$v_k = \frac{w_k}{\lambda_k^{1/2}}, \qquad k = 1, \ldots,$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $H_0^1(U)$.

(iii) Έστω $L = -\Delta$. Δείξτε οτι για κατάλληλες σταθερές c_k οι συναρτήσεις $c_k w_k$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $H_0^1(U)$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο (δηλ. $\langle u, v\rangle = \int_U uv dx + \int \nabla u \cdot \nabla v dx$) και υπολογίστε τις σταθερές c_k.

4. Εστω $U \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό, συνεκτικό, ομαλό και φραγμένο χωρίο, $f \in L^2(U)$ και

$$I[u] = \int_U \left(\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x)\right) dx, \qquad u \in H_0^1(U).$$

Θέτουμε

$$\mu = \inf_{\substack{u \in H_0^1(U) \\ u \neq 0}} I[u] \ .$$

Δείξτε οτι

(i)

$$\mu > -\infty.$$

(ii) Υπάρχει $w \in H_0^1(U)$ τ.ω.

$$I[w] = \mu.$$

(iii) Η συνάρτηση w είναι μοναδική.

(iv) Η w είναι ασθενής λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad x \in U, \\ u &= 0, \quad x \in \partial U, \end{aligned}$$

5. Εστω $U \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο χωρίο και $u \in H_0^1(U)$ τ.ω. $u \geq 0$ σχεδον παντού στο U. Σκοπός της άσκησης είναι να δείξουμε οτι

$$\text{υπάρχει ακολουθία } \phi_n \in C_c^\infty(U), \quad \phi_n \geq 0, \qquad \phi_n \to u \ \text{ στον } \ H^1(U). \tag{1}$$

(α) Έστω ακολουθία $\psi_n \in C_c^\infty(U)$ τ.ω. $\psi_n \to u$ στον $H^1(U)$. Δείξτε ότι

$$\int_U |\nabla(\psi_n^+ - u)|^2 dx \leq \int_U |\nabla(\psi_n - u)|^2 dx + \int_{\{u>0\}} \chi_{\{\psi_n<0\}} |\nabla u|^2 dx.$$

(β)Δείξτε οτι

$$\psi_n^+ \to u, \qquad \text{στον } H_0^1(U).$$

(γ) Δείξτε την (1).

Ορισμός: **A**. Εστω T_1, T_2 δύο κατανομές στον $(C_c^\infty(U))'$. Λέμε οτι

$$T_1 \leq T_2,$$

αν

$$\langle T_1, \phi \rangle \leq < T_2, \phi >, \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(U), \quad \phi \geq 0.$$

B. Έστω u_1, $u_2 \in H_1(U)$. Λέμε οτι

$$u_1 \leq u_2 \qquad \text{στο} \quad \partial U$$

αν

$$(u_1 - u_2)^+ \in H_0^1(U).$$

6. (Αρχή μεγίστου για ασθενείς λύσεις) Εστω $U \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό, συνεκτικό, ομαλό και φραγμένο χωρίο και

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n (\alpha_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + c(x)u.$$

Τα $\alpha_{ij} \in L^\infty(U)$ είναι συμμετρικά και ικανοποιούν την ομοιόμορφη συνθήκη ελειπτικότητας. Επι πλέον $0 \leq c \in L^\infty(U)$. Δείξτε οτι αν u_1, $u_2 \in H^1(U)$ είναι τ.ω.

$$\begin{aligned} Lu_1 &\leq Lu_2, \qquad \text{στο } (C_c^\infty(U))' \\ u_1 &\leq u_2, \qquad \text{στο } \ \partial U, \end{aligned}$$

τότε $u_1 \leq u_2$ στο U.

7.$^{\otimes}$ (Ενα Θεώρημα ομαλότητας του Stampachia) Εστω $U \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο χωρίο. Οι συντελεστές $\alpha_{ij}(x)$, $1 \le i,j \le n$ είναι τ.ω. $\alpha_{ij} \in L^\infty(U)$, $a_{ij} = a_{ji}$, και ικανοποιούν τη συνθήκη ελλειπτικότητας, δηλ. για σχεδόν κάθε $x \in U$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j \ge \theta|\boldsymbol{\xi}|^2, \qquad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^n.$$

Ακόμη $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, με $h_i \in L^2(U)$, $i = 1, \ldots, n$.

(α) Δείξτε οτι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in H_0^1(U)$ τ.ω.

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_U \alpha_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx = \int_U \boldsymbol{h} \cdot \nabla v \; dx, \qquad \forall v \in H_0^1(U).$$

(β) Στη συνέχεια της άσκησης σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το εξής: Αν $h_i \in L^q(U)$ με $q > n$ για όλα τα $i = 1, \ldots, n$, τότε $u \in L^\infty(U)$ και

$$\|u\|_{L^\infty(U)} \le C\|\boldsymbol{h}\|_{L^q(U)}, \tag{2}$$

με κατάλληλη σταθερά $C > 0$ που εξαρτάται μόνο από τα n, q, θ, U.

(1) Έστω $k \ge 0$ και $(u-k)_+ = \max(u-k,\ 0)$. Δεχόμαστε ως γνωστό οτι $(u-k)_+ \in H_0^1(U)$ και οτι $\nabla(u-k)_+ = \nabla u \chi_k$ όπου χ_k είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του $U_k = \{x \in U : u(x) \ge k\}$ (έχουμε κάνει σχετική άσκηση βλ. Φυλλάδιο 2/2) Δείξτε οτι

$$\theta \int_U |\nabla(u-k)_+|^2 dx \le \int_{U_k} \boldsymbol{h} \cdot \nabla(u-k)_+ dx.$$

(2) Δείξτε οτι

$$\|\nabla(u-k)_+\|_{L^2(U)} \le \frac{|U_k|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}}{\theta}\|\boldsymbol{h}\|_{L^q(U)}.$$

(3) Υπενθυμίζω την ανισότητα Sobolev

$$\|w\|_{L^r(U)} \le C_*\|\nabla w\|_{L^2(U)}, \qquad \forall w \in H_0^1(U),$$

όπου $r = \frac{2n}{n-2}$ όταν $n > 2$, ενώ όταν $n = 2$ το $r > 2$ είναι αυθαίρετο. Στη συνέχεια δείξτε οτι

$$\|(u-k)_+\|_{L^1(U)} \le \frac{C_*|U_k|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}}}{\theta}\|\boldsymbol{h}\|_{L^q(U)}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(4) Θέτουμε $H(k) = \int_k^\infty |U_s| ds$. Θεωρώντας ως γνωστή από την Πραγματική Ανάλυση τη σχέση

$$\|(u-k)_+\|_{L^1(U)} = \int_k^\infty |U_s| ds,$$

δείξτε ότι

$$H(k) \le \frac{C_*\|\boldsymbol{h}\|_{L^q(U)}}{\theta}\left[-H'(k)\right]^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}}.$$

(5) Έστω $k_0 = \sup\{k \geq 0 : H(k) > 0\}$. Δείξτε ότι

$$k_0 \leq \frac{\beta^\gamma H^{1-\gamma}(0)}{1-\gamma},$$

όπου

$$\beta = \frac{C_* \|\boldsymbol{h}\|_{L^q(U)}}{\theta}, \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{p}.$$

(5) Δείξτε οτι ισχύει η (2).

$\otimes$: *Οι ασκήσεις ειναι προαιρετικές*