Δευτέρα 23 Σεπτεμβρίου 2019

Ειρήνη Υ[illegible]

1º ΜΑΘΗΜΑ: ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Διδάσκων: κ. Φίλιππας Στάθης (ΤΜΗΜΑ Β)

Αίθουσα: Α203

$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,\dots\}$ → Φυσικοί αριθμοί

$\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ → Ακέραιοι αριθμοί

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}$, όπου $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{Z}^*\}$ → Ρητοί αριθμοί

$\mathbb{R} = \{-\infty, +\infty\}$ → Πραγματικοί αριθμοί

Ανισότητες: $x \leq y$

- Αν $z \in \mathbb{R}$ → $x+z \leq y+z$
- Αν $z>0$ → $x \cdot z \leq y \cdot z$
- Αν $z<0$ → $x \cdot z \geq y \cdot z$

Απόλυτη τιμή:

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x \leq 0 \end{cases}$$

πάντα: $|x| \geq 0$

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Τριγωνική Ανισότητα

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad ||x|-|y|| \leq |x \pm y| \leq |x|+|y|$

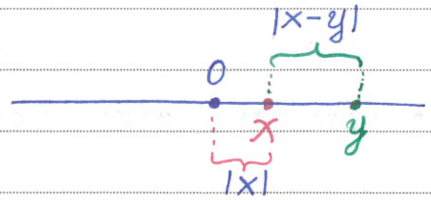
* $|x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$

* $|x| \geq \alpha \iff x \geq \alpha$ ή $x \leq -\alpha$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ!!!

23/09/2019

→ Οι πραγματικοί αριθμοί απεικονίζονται πάνω στη πραγματική ευθεία.



$|x|$ = η απόσταση του x από το 0.

$|x-y|$ = η απόσταση του x από το y.

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

- Αν $a<b$ τότε $(a,b)=\{x: a<x<b\}$ → ανοικτό διάστημα
- Αν $a<b$ τότε $[a,b]=\{x: a\leq x\leq b\}$ → κλειστό διάστημα
- $(a,+\infty)=\{x: x>a\}$ → μη φραγμένο διάστημα (σύνολο)

▸ Αν A σύνολο αριθμών και υπάρχει αριθμός u τέτοιος ώστε $x\leq u$ $\forall x\in A$ τότε το u (upper) λέγεται άνω φράγμα.

▸ Αν A σύνολο αριθμών και υπάρχει αριθμός ℓ τέτοιος ώστε $\ell\leq x$ $\forall x\in A$ τότε το ℓ (lower) λέγεται κάτω φράγμα.

« ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ »

(i) $\forall b\in\mathbb{R}$ $\exists$ $n\in\mathbb{N}$ ούτως ώστε $n>b$

Για οποιοδήποτε b πραγματικό αριθμό τότε υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός ώστε $n>b$.

(ii) $\forall a>0$ $\exists$ $n\in\mathbb{N}$ ούτως ώστε $\frac{1}{n}<a$
($a\in\mathbb{R}$)

Για οποιοδήποτε a πραγματικό αριθμό υπάρχει κάποιος φυσικός $\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\frac{1}{n}<a$.

23/09/2019

Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού x

Συμβολισμός: $[x]$ = ο ακέραιος κ τ.ω. $\kappa \leqslant x \leqslant \kappa+1$

π.χ. $x=2{,}5 \rightarrow [x]=2$

$x=3{,}1 \rightarrow [x]=3$

$x=0{,}8 \rightarrow [x]=0$

$x=-1{,}6 \rightarrow [x]=-2$

$x=5 \rightarrow [x]=5$

Πυκνότητα ρητών αριθμών στους πραγματικούς:

$\forall\, a<b$ πραγματικοί αριθμοί $\exists\, r\in\mathbb{Q}$, όπου $a<r<b$

$a\in\mathbb{R}$

$b=a+10^{-100}$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΙΖΕΣ

▷ $a^n = \underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ φορές}}$

• $a^0=1$ (από 'δω βγαίνει $a^m\cdot a^n = a^{m+n}$)

$\left(a^0=a^{3-3}=\frac{a^3}{a^3}=1\right)$

• $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $\quad a\in\mathbb{R}/\{0\}$ ή $a\in\mathbb{R}^*$

▷ $a>0$ $\quad \sqrt[\kappa]{a^1}=a^{\frac{1}{\kappa}}$

$\cancel{-2^{1/4}}$ ▷ πρέπει η υπόρριζη ποσότητα να είναι θετικός αριθμός!!!

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

$a>0,\ a\neq 1$ και $y>0$

• Αν $a^x=y$. Τότε υπάρχει, τέτοιο x και $y=\log_a y$

• Αν $a=e$ (2,73), $x=\ln y$

23/09/2019

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

i) $\log 1 = 0$
ii) $\log a \cdot \log b =$

"ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ"

Τετάρτη 25 Σεπτεμβρίου 2019

2º ΜΑΘΗΜΑ: ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Διδάσκων: κ. Φίλιππας Στάθης (ΤΜΗΜΑ Β)

Αίθουσα: Α 203

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

→ είναι μία ειδικού τύπου συνάρτηση, όπου αντί να παίρνει $\mathbb{R}$ αριθμούς, παίρνει φυσικούς και μας δίνει πραγματικούς.

Ορισμός: Απεικόνιση $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f(1), f(2), f(3), \ldots$ κ.λπ.

συνήθης συμβολισμός: $a_1, a_2, a_3, \ldots$

$b_1, b_2, \ldots$

$x_1, x_2, x_3, \ldots$

$\{x_n\}, n = 1, 2, \ldots$

Με απλά λόγια: Μία άπειρη επιλογή αριθμών που τους βάζουμε στη σειρά.

π.χ. $a_n = \frac{1}{n}$, $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots,$

$a_n = n$, $\quad 1, 2, 3, 4, \ldots$ } Αυτή η ακολουθία περιέχει τους ΦΥΣΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ.

$a_n = (-1)^n$, $\quad -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

το πιο extreme απλό

(η άπειρη επανάληψη του 1)

$a_n = 1$, → ΣΤΑΘΕΡΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ (όποιο κι αν είναι το n, η τιμή της ακολουθίας είναι το 1)

$a_n = \frac{n-1}{n}$, $\quad 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

25/09/2019

Ορισμός:
- Η $\{x_n\}$ είναι αύξουσα ↗ αν $x_{n+1} \geq x_n \ \forall n$.
- Η $\{x_n\}$ είναι γν. αύξουσα ↗ αν $x_{n+1} > x_n$.

- Η $\{x_n\}$ είναι φθίνουσα ↘ αν $x_{n+1} \leq x_n$.
- Η $\{x_n\}$ είναι γν. φθίνουσα ↘ αν $x_{n+1} < x_n$.

αύξουσα ή φθίνουσα → μονότονη
γν. αύξουσα ή γν. φθιν. → γνήσια μονότονη

Ορισμός: (x_n) → άνω φραγμένη $x_n \leq u \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
→ κάτω φραγμένη $\mathbb{R} \ni \ell \leq x_n$, $\ell \leq x_n \leq u$, $\forall n$
→ ανήκει το ℓ στο $\mathbb{R}$

$|x_n| < M \Leftrightarrow x_n$ φραγμένη

Σύνολο όρων ακολουθίας → ποιοι διαφορετικοί αριθμοί εμφανίζονται στην ακολουθία

π.χ. $a_n = \frac{1}{n}$, $\Sigma = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

$a_n = (-1)^n$, $\Sigma = \{-1, 1\}$ → δυσύνολο

25/09/2019

Παραδείγματα

$a_n = \frac{1}{n}$, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

- γνήσια φθίνουσα ακολουθία
- είναι άνω φραγμένη με άνω φράγμα τον αριθμό 1.
- είναι κάτω φραγμένη με κάτω φράγμα τον αριθμό μηδέν.

$a_n = n$, $1, 2, 3, 4, \ldots$

- γνήσια αύξουσα ακολουθία
- έχει κάτω φράγμα το 1
- ΔΕΝ έχει άνω φράγμα.

$a_n = (-1)^n$; $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

- ΔΕΝ είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα.
- ΕΙΝΑΙ ΦΡΑΓΜΕΝΗ και άνω και κάτω.

$a_n = 1$ ⤳ ΣΤΑΘΕΡΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

- είναι ΜΟΝΟΤΟΝΗ (είτε αύξουσα είτε φθίνουσα)
- είναι ΦΡΑΓΜΕΝΗ

$a_n = \frac{n-1}{n}$, $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

- γνήσια αύξουσα
- μηδέν κάτω φράγμα

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΓΙΑ ΟΡΙΣΜΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

π.χ. $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n^2$, $n = 1, 2$

$(2, 4, 16, 16^2)$

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$

$(x_3 = 3,\ x_4 = x_2 + x_3 = 5,\ x_5 = x_4 + x_3 = 5 + 3 = 8)$

ακολουθία Fibenacci

25/09/2019

⤳ Ας ΔΟΥΜΕ ΤΗΝ $1/n$. Είναι πάντα ΘΕΤΙΚΗ!!!

★ Έστω ο αριθμός 0,1 όταν $n \geq 10$ τότε $\frac{1}{10}$

★ Έστω ο αριθμός $1/1000$ όταν $n \geq 10.000$ τότε $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{10.000} < \frac{1}{1000}$

★ Έστω ο 10^{-6} αν το $n \geq 10^{7 \div 6}$ τότε το $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{10^7} = 10^{-7} < 10^{-6}$

Ορισμός:

→ η περίπτωση του μηδενικού ορίου

(i) Η x_n τείνει στο 0 (μηδέν) αν $\forall \varepsilon > 0$
$\exists$ (υπάρχει) $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|x_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

(ii) Η x_n τείνει στο $x \in \mathbb{R}$ αν $\forall \varepsilon > 0$
$\exists$ (υπάρχει) $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|x_n - x| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

⤳ Ας ΔΟΥΜΕ ΤΗΝ $1/n$. Είναι πάντα ΘΕΤΙΚΗ!!!
Θα δείξω ότι $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

ΠΛΗΡΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΥΣΤΗΡΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $\varepsilon > 0$. Από Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Όταν $n \geq n_0$ έχω ότι $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Άρα $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

25/09/2019

Συμβολισμοί: $x_n \to x$ ή $\lim x_n = x$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

- $a_n = n$ ⤳ δεν συγκλίνει
- $a_n = (-1)^n$ ⤳ δεν συγκλίνει (δεν πλησιάζουν κοντά σε 1 αριθμό)

↳ ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (Με άτοπο)

Έστω ότι συγκλίνει στο x, τότε από τον ορισμό έχω ότι

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0$

τ.ω. όταν $n \geq n_0$ $|x_n - x| < \varepsilon$.

- Αν n άρτιος ($x_n = 1$) και έχω ότι $|1-x| < \varepsilon$.
- Αν n περιττός ($x_n = -1$) και επομένως $|-1-x| < \varepsilon \Leftrightarrow |1+x| < \varepsilon$.

$$2 = (1+x) + (1-x) \leq |1-x| + |1+x| \Rightarrow$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow$$

$\varepsilon > 1$, άτοπο!!! (διότι το ε είναι επιλεγμένο αυθαίρετα!)