ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 5 Δεκεμβρίου 2019

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός Ι – Τμήμα Β

Φυλλάδιο 11

1)$^{\otimes}$ Δείξτε οτι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$. Με βάση αυτό δείξτε οτι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

2)$^{\otimes}$ Δείξτε οτι τελικά ισχύει η ανισότητα: $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{2}{n}$. Παρατηρήστε οτι η τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1)-\ln n)$ αποκλίνει στο $+\infty$. Στη συνέχεια δείξτε οτι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$.

3)$^{\otimes}$ Έστω η ακολουθία (x_n) με $x_n\geq 0$.
(α) Δείξτε οτι αν η $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ συγκλίνει.
(β) Ισχύει το αντίστροφο;
(γ) Αν η (x_n) επιτρέπεται να αλλάζει πρόσημο ισχύει το συμπέρασμα του (α);

4)$^{\otimes}$ Με χρήση του ολοκληρωτικού κριτηρίου μελετήστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n},\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n},\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n},\qquad (p>0).$$

5)$^{\otimes}$ Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}.$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)