



Πέμπτη 12 Δεκεμβρίου 2019

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός Ι – Τμήμα Β

Φυλλάδιο 12

1)⊗ Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[n]{n} + 1)^n}.$$

2)⊗ Εξετάστε ως προς την σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{4}{3}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n + (-1)^n n}.$$

3)⊗ Υπολογίστε τα γενικευμένα ολοκληρώματα εφ'όσον υπάρχουν

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x^2 + 1)}, \quad \int_0^{\infty} x e^{-x} dx, \quad \int_0^1 \ln x dx, \quad \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

4)⊗ Δείξτε ότι τα παρακάτω ολοκληρώματα συγκλίνουν απόλυτα

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} \cos^2(x) dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx.$$

5)⊗ Δείξτε ότι τα παρακάτω ολοκληρώματα συγκλίνουν υπό συνθήκη

$$\int_2^{\infty} \frac{\sin x}{\ln x} dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x + 1} dx.$$

6) Έστω $x_n \geq 0$ για κάθε n . Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει αποδείξτε ότι και οι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1 + x_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{1 + x_n^2}.$$

συγκλίνουν.

7) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n} x^n.$$

8) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_2^4 \frac{x^2 dx}{x-1}, \quad \int \frac{dx}{x^4-1}, \quad \int_0^{\infty} \frac{2x dx}{(1+x)(1+x^2)}.$$

9) Η συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0.$$

10) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f που ικανοποιούν

$$f(x) = \int_0^x f(t) dt + x.$$

11) Η $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $f(a) = 0$ και για $M > 0$ ισχύει

$$|f'(x)| \leq M|f(x)|, \quad \forall x \in [a, b].$$

(α) Δείξτε ότι

$$|f(x)| \leq M \int_a^x |f(t)| dt, \quad x \in [a, b].$$

(β) Δείξτε ότι

$$f(x) \equiv 0, \quad x \in [a, b].$$

Υποδ για το (β): Μπορείτε να θέσετε $\phi(x) := \int_a^x |f(t)| dt$.

12) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}, \quad \int_0^{\infty} \sin(x^{2019}) dx.$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με \otimes

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)