ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 21 Νοεμβρίου 2019

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός Ι – Τμήμα Β

Φυλλάδιο 9

1)$^{\otimes}$ Δείξτε οτι η συνάρτηση $\ln x$, $x>0$ είναι κοίλη. Αν $p,\ q>1$ είναι τ.ω. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, δείξτε ότι

$$\ln\left(\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\right)\geq \frac{1}{p}\ln x^p+\frac{1}{q}\ln y^q, \qquad \forall\ x,y>0.$$

Συμπεράνετε οτι

$$xy\leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}, \qquad \forall\ x,y>0.$$

2)$^{\otimes}$ Δίδεται η συνάρτηση

$$y=\begin{cases} x-2x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι $\frac{dy}{dx}|_{x=0}=1>0$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένα $\varepsilon>0$, οσοδήποτε μικρό, ώστε η συνάρτηση να είναι αύξουσα στο διάστημα $(-\varepsilon,\varepsilon)$.

3)$^{\otimes}$ Αφού γράψετε τον τύπο Taylor για τις αντίστοιχες συναρτήσεις, δείξτε τις παρακάτω ανισότητες

$$e^x\geq \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!} \quad , \qquad x>0 \qquad ,$$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\leq \ln(1+x) \ \leq\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}, \qquad x>0.$$

4)$^{\otimes}$ Έστω $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ η οποία είναι $(n-1)$ φορές παραγωγίσιμη και η $f^{(n)}(x_0)$ υπάρχει για κάποιο $x_0\in[a,b]$. Σκοπός της άσκησης είναι να δείξουμε οτι για κάθε $x\in[a,b]$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n). \quad (1)$$

(i) Έστω

$$R_n(x)=f(x)-\left(f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right).$$

Δείξτε οτι

$$R_n(x_0)=R_n^{'}(x_0)=\ldots=R_n^{(n)}(x_0)=0.$$

(ii) Στη συνέχεια δείξτε οτι

$$R_n^{(n-1)}(x) = R_n^{(n)}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0).$$

(iii) Δουλεύοντας αντίστοιχα για τις παραγώγους χαμηλότερης τάξης δείξτε τελικά οτι

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

(Παρατηρήστε οτι στη μορφή (1) δεν απαιτείται η ύπαρξη της $(n+1)$ παραγώγου.)

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)