



Σάββατο 16 Νοεμβρίου 2019

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός Ι – Τμήμα Β

Πρόοδος

1) Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n+5}, \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}.$$

2) Έστω  $0 < a_1 < b_1$  και ορίζουμε

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Δείξτε ότι  $a_n \leq b_n$  για κάθε  $n$ . Δείξτε ότι οι ακολουθίες  $(a_n)$  και  $(b_n)$  είναι μονότονες. Δείξτε ότι συγχλίνουν. Δείξτε ότι έχουν το ίδιο όριο.

3 Υπολογίστε τα όρια, εφόσον υπάρχουν,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2 + \sin x} + x - \cos x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin x \sin \frac{1}{x^2}.$$

4) Για ποιές τιμές του  $a \in \mathbf{R}$  η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin x^a, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

είναι συνεχής στο 0; είναι παραγωγίσιμη στο 0;

5) Η συνάρτηση  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  είναι συνεχής, θετική και ικανοποιεί

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Δείξτε ότι η  $f$  είναι φραγμένη. Λαμβάνει μέγιστη τιμή; Λαμβάνει ελάχιστη τιμή;

Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πλήρως δικαιολογημένες.

**Διάρκεια εξέτασης 1,5 ώρα.**