Δευτέρα 23 Σεπτεμβρίου 2019.

* Σύνολα και αριθμοί.

φυσικούς $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

ακέραιους $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

ρητούς $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{Z}^*\}$

πραγματικούς $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

άρρητους $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi, e$, κ.α$\}$.

* Συμβολισμός
$\forall$: για κάθε
$\exists$: υπάρχει.

* Ανισότητες. Είναι μια σχέση διάταξης $x \leq y$

κάποιες βασικές ιδιότητες:

- Εάν $z \in \mathbb{R}$ τότε $x + z \leq y + z$
- Εαν $z > 0$ τότε $x \cdot z \leq y \cdot z$
- Εαν $z < 0$ τότε $x \cdot z \geq y \cdot z$

* Απόλυτη τιμή

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

και ισχύει $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Βασικές ιδιότητες-εργαλεία:

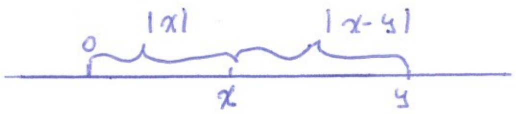
i) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

ii) Τριγωνική Ανισότητα. $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

iii) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

iv) $|x| > a \iff x \geq a$ ή $x \leq -a$

~ Γεωμετρική Ερμηνεία



$|x|$: απόσταση του x από το 0

$|x-y|$: απόσταση (ή μήκος) του x από το y

* Έννοια διαστήματος.

- Αν $a < b$ τότε $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (ανοιχτό διάστημα)

(1) • $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (κλειστό διάστημα) $a, b \in \mathbb{R}$

(2) • $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (μικτό διάστημα)

(3) • $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ ($\pm\infty$ είναι σύμβολο και όχι αριθμός).

Θα λέμε ότι για το σύνολο (3) είναι μη φραγμένο διάστημα ή σύνολο

Το σύνολο (1) είναι φραγμένο.

*Ορισμός:

Αν A είναι σύνολο αριθμών και υπάρχει u τέτοιο ώστε:

- $x \le u$ $\forall x \in A$ τότε το u λέγεται άνω φράγμα
- $x \ge l$ $\forall x \in A$ τότε το l λέγεται κάτω φράγμα.

* Αρχιμήδεια Ιδιότητα.

i) $\forall b \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω $n > b$

Για οποιοδήποτε b πραγματικό αριθμό τότε υπάρχει κάποιος φυσικός n ώστε $n > b$

ii) $\forall \alpha > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω $\frac{1}{n} < \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Για οποιοδήποτε α πραγματικό αριθμό υπάρχει κάποιος φυσικός $\mathbb{N}$ n τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \alpha$.

* Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού x.

Συμβολισμός $[x]$ = ο ακέραιος k τ.ω $k \le x \le k+1$

Παραδείγματα.

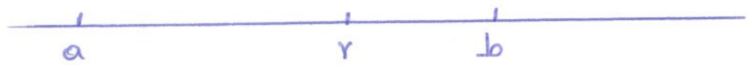
- $x = 2.5$ τότε $[x] = 2$
- $x = 3.1$ τότε $[x] = 3$
- $x = -2.1$ τότε $[x] = -3$ *
- $x = 0.8$ τότε $[x] = 0$
- $x = -1.6$ τότε $[x] = -2$ *

*Προσοχή θέλουμε τον μεγαλύτερο ακέραιο ώστε $k \le x$

* Ιδιότητα πραγματικών αριθμών (πυκνότητα ρητών).

$\forall \alpha < b$ $\alpha, b \in \mathbb{R}$ $\exists r \in \mathbb{Q}$ τ.ω $\alpha < r < b$

Παράδειγμα



αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και $b = \alpha + 10^{-100}$ $\exists r \in \mathbb{Q}$ τ.ω $\alpha < r < b$.

* Δυνάμεις και Ρίζες.

Βασικές ιδιότητες:

- $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}^{n}$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ή $\alpha \in \mathbb{R}^*$
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ Άλλες ιδιότητες δυνάμεων θεωρούνται γνωστές
- $\alpha > 0$ $\sqrt[k]{a} = a^{1/k}$

* Λογαριθμικές συναρτήσεις

* Ορισμός.

$\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και $y > 0$ τότε: Αν $\alpha^x = y$ τότε υπάρχει τέτοιο x και είναι $\log_\alpha y$

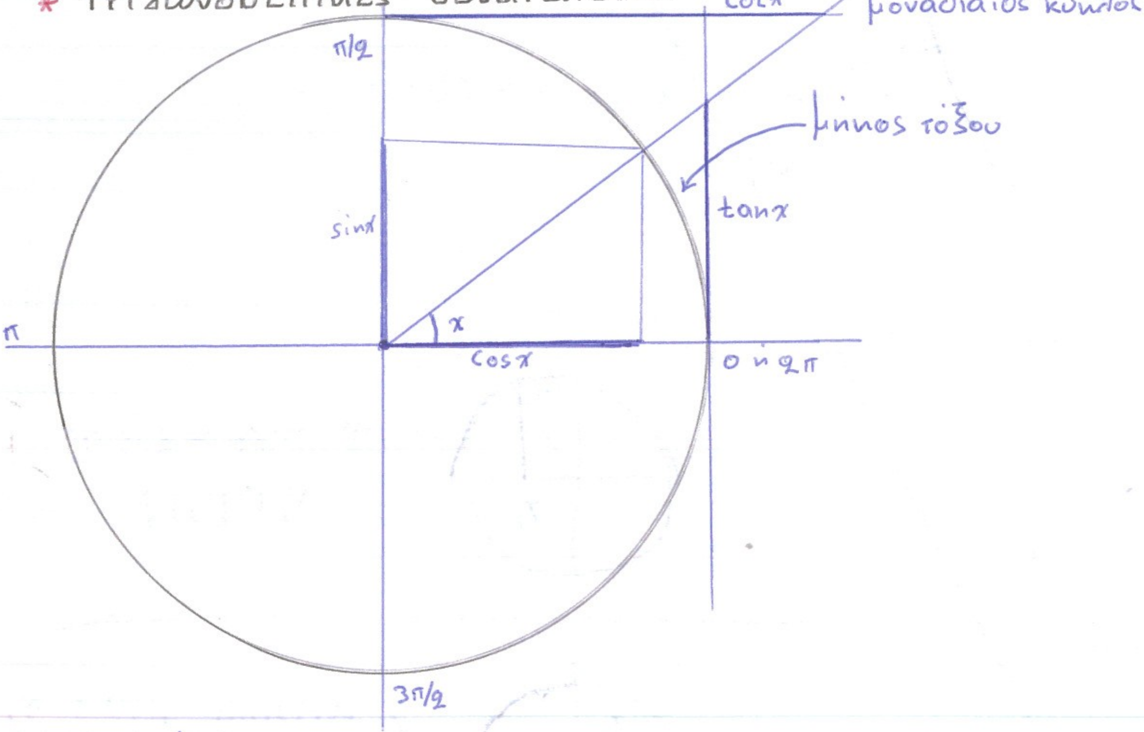
Αν $\alpha = e$ τότε $x = \ln y$

Βασικές ιδιότητες

i) $\log 1 = 0$

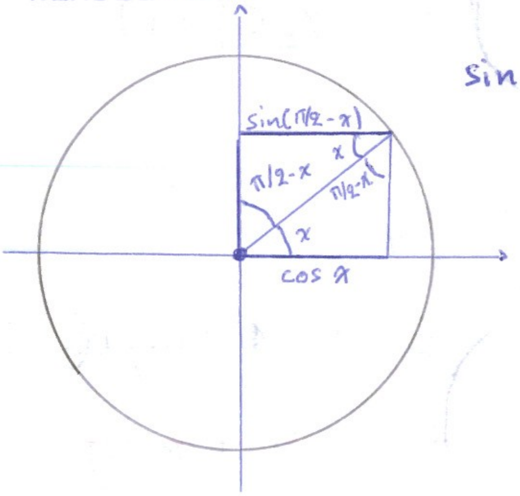
---

* Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

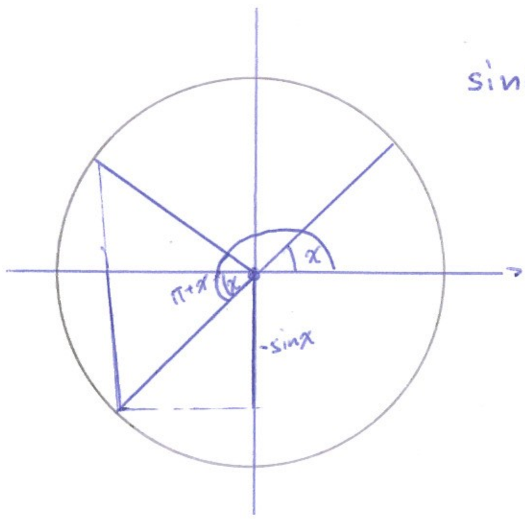


$\sin x = \eta\mu x$
$\cos x = \sigma\upsilon\nu x$
$\tan x = \varepsilon\varphi x$
$\cot x = \sigma\upsilon\nu\varepsilon\varphi x$.

Παραδείγματα

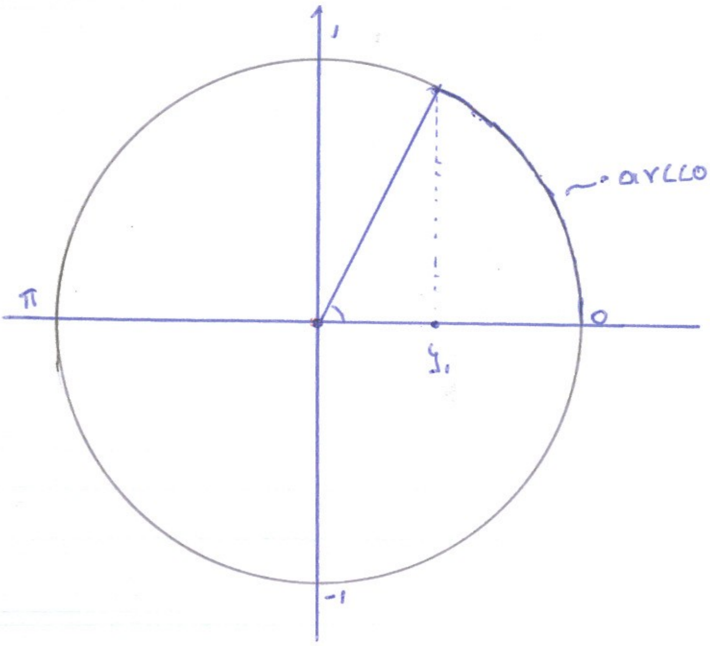


$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

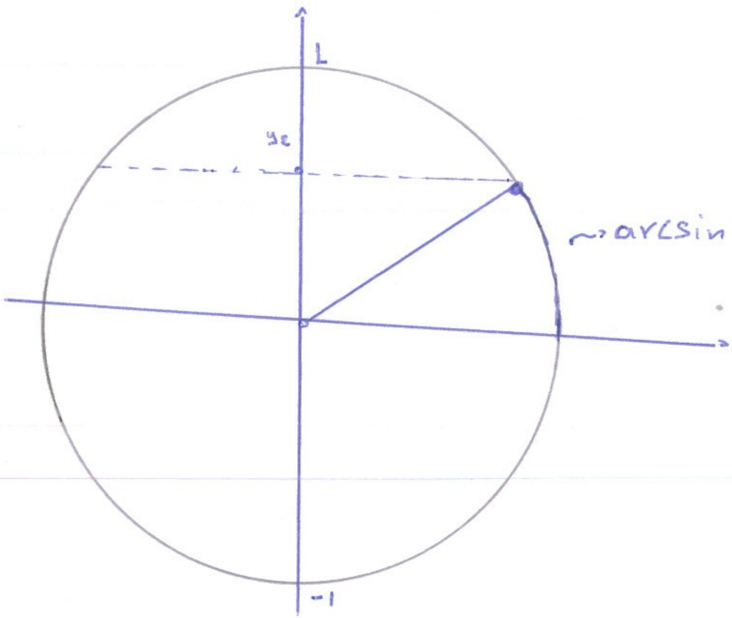


$\sin(\pi + x) = -\sin x$

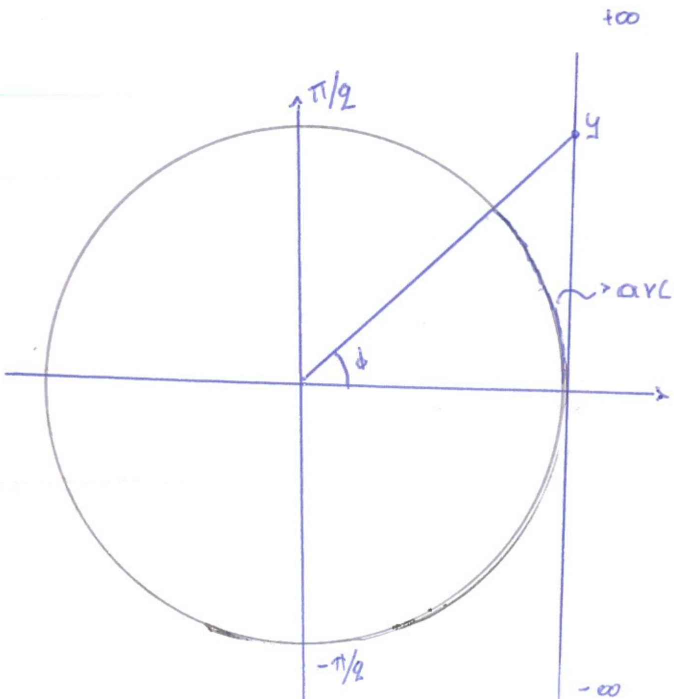
* Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις



$\rightsquigarrow \arccos y_1 \in [0, \pi]$, $y_1 \in [-1, 1]$



$\rightsquigarrow \arcsin y_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$ $y_2 \in [-1, 1]$



$\rightsquigarrow \arctan y \in (-\pi/2, \pi/2)$ $y \in (-\infty, +\infty)$

* Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών.

*Ορισμός: Είναι μια απεικόνιση από το $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$
δηλ. $f(1), f(2), \dots$ οι τιμές της ακολουθίας.
Συμβολίζουμε μια ακολουθία ως: $a_1, a_2, \dots$ ή $b_1, \dots$ ή $x_1, \dots$
Συνοπτικά $\{x_n\}$ $n = 1, 2, \dots$

Με απλά λόγια: Μια ακολουθία είναι μια άπειρη επιλογή αριθμών που τους βάζουμε στην σειρά.

*παραδείγματα

- $a_n = 1/n$ $n \in \mathbb{N}$ και είναι $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, $\dots$ $a_n = 1/n$
- $a_n = n$ $n \in \mathbb{N}$ $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\dots$, $a_n = n$
- $a_n = (-1)^n$ $n \in \mathbb{N}$ $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $\dots$

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ 1 & \text{αν } n \text{ άρτιος.} \end{cases}$$

- $a_n = 1$ είναι η σταθερή ακολουθία $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_1 = 1, a_2 = 1, \dots, a_n = 1$
- $a_n = \frac{n-1}{n}$ $a_1 = 0$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 2/3$, $\dots$, $a_n = \frac{n-1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

---

* Μελέτη Ακολουθιών.

*Ορισμός: Η $\{x_n\}$ είναι αύξουσα αννν $x_{n+1} \geq x_n$ $\forall n$ $x_n(\uparrow)$
Η $\{x_n\}$ είναι γν. αύξουσα αννν $x_{n+1} > x_n$ $\forall n$ $x_n(\uparrow)$
Η $\{x_n\}$ είναι φθίνουσα αννν $x_{n+1} \leq x_n$ $\forall n$ $x_n(\downarrow)$
Η $\{x_n\}$ είναι γν. φθίνουσα αννν $x_{n+1} < x_n$ $\forall n$ $x_n(\downarrow)$

Είναι μονότονη αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα και
γνήσια μονότονη αν είναι γν. αύξουσα (ή φθίνουσα)

---

*Ορισμός Η $\{x_n\}$ είναι άνω φραγμένη αννν $x_n \leq u$, $u \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Η $\{x_n\}$ είναι κάτω φραγμένη αννν $l \leq x_n$ $l \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Η $\{x_n\}$ είναι φραγμένη αννν είναι $l \leq x_n \leq u$. δηλ. $|x_n| < M$

αννν: αν και μόνο αν $\iff$ αν: $\implies$

στο παράδειγμα 1
η • $a_n = 1/n$ είναι φθίνουσα (γνησίως) αφού $1 > 1/2 > 1/4, \ldots$
και έχει άνω φράγμα π.χ 1 ή 3 ή 5
και κάτω φράγμα π.χ 0 ή -1

Επομένως είναι φραγμένη.

• $a_n = n$ είναι γν. αύξουσα και κάτω φραγμένη.
• $a_n = (-1)^n$ δεν είναι μονότονη και φραγμένη
• $a_n = 1$ είναι γνησίως μονότονη και φραγμένη.
• $a_n = \frac{n-1}{n}$ είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη $(0 < 1 - 1/n < 1)$.

---

* Σύνολο Όρων ακολουθίας (Σ)

ποιοι οι διαφορετικοί αριθμοί που εμφανίζονται στην ακολουθία

παράδειγμα: $a_n = 1/n$ $\quad \Sigma = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$

$a_n = (-1)^n$ $\quad \Sigma = \{-1, 1\}$

$a_n = 1$ $\quad \Sigma = \{1\}$

---

* Αναδρομική Ακολουθία

*Ορισμός: π.χ. • $x_1 = 2$ $\quad x_{n+1} = x_n^2$, $n = 1, 2, \ldots$ τότε $x_2 = 4$, $x_3 = 16, \ldots$

• $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 2$ $\quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ τότε $x_3 = 3$, $x_4 = x_3 + x_2 = 5$

$x_5 = x_4 + x_3 = 5 + 3 = 8$. (Fibonacci)

---

* Όρια Ακολουθιών.

*Ορισμός: Η x_n τείνει στο 0 αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|x_n| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ $\quad (x_n \to 0)$

Βλέπουμε την $1/n$. Είναι πάντα θετική
Έστω ο αριθμός 0,1 τότε όταν $n \geq 10$ είναι $1/n \leq \frac{1}{10} = 0{,}1$
Έστω ο αριθμός $\frac{1}{1000}$ όταν $n \geq 10.000$ τότε $1/n \leq 1/10.00 < \frac{1}{1000}$
Έστω ο αριθμός ο 10^{-6} όταν $n \geq 10^7$ τότε $1/n \leq 1/10^7 < 10^{-6}$

*Ορισμός: Η (x_n) τείνει στο $x \in \mathbb{R}$ αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $|x_n - x| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

Συμβολισμός $x_n \to x$ $\quad \lim x_n = x$ ή $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$

* Απόδειξη $1/n \to 0$

Έστω $\varepsilon>0$. Από αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$

όταν $n \geq n_0$ έχω ότι $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ Άρα $1/n \to 0$.

παραδείγματα

- $a_n = n$ διαισθητικά δεν συγκλίνει
- $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει

Απόδειξη ότι η $(-1)^n$ δεν συγκλίνει:

Έστω ότι συγκλίνει στο x. Τότε από τον ορισμό έχω ότι $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. όταν $n \geq n_0$ $|x_n - x| < \varepsilon$.

Αν n άρτιος ($x_n=1$) και έχω ότι $|1-x|<\varepsilon$ (1)

Αν n περιττός ($x_n=-1$) και επομένως $|-1-x|<\varepsilon \iff |1+x|<\varepsilon$ (2)

Έχουμε: $2 = (1+x)+(1-x) \leq |1-x| + |1+x| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon \Longrightarrow \varepsilon > 1$ άτοπο
διότι το ε είναι επιλεγμένο αυθαίρετα!!