Δευτέρα 25 Νοεμβρίου 2019.

* Τάξη μεγέθους

i) Αν $\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ τότε $f(x) = o(g(x)),\ x \to \xi$.

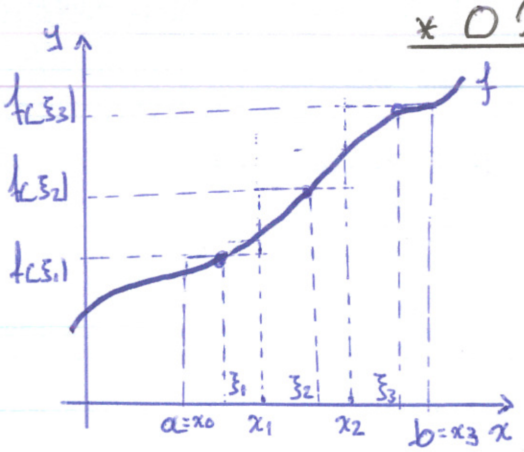
ii) Αν $0 < \kappa < \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < M$ (για $x \to \xi$) τότε $f(x) = O(g(x)),\ x \to \xi$.

iii) Αν $\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ τότε $f(x) \sim g(x),\ x \to \xi$.

*Παραδείγματα

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ τότε $\sin x \sim x,\ x \to 0$.
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$ τότε $\ln(1+x) \sim x,\ x \to 0$.
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ τότε $\ln x = o(x),\ x \to +\infty$.
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+5}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x} = 1$ τότε $\sqrt{x^2+x+5} \sim x,\ x \to +\infty$

* Ολοκλήρωμα Riemann



Το εμβαδόν κάτω από το διάγραμμα της f από $a = x_0$ μέχρι $b = x_3$ είναι

$$E \simeq f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2).$$

⤳ Έχουμε μια Δ: διαμέριση
και Ξ: τυχαία σημεία (x_i, x_{i+1}).
οπότε έχουμε εμβαδόν $\Sigma(f, a, b, \Delta, \Xi)$.

Αν $|\Delta| \to 0$ $\left(|\Delta| = \max_i |x_{i+1} - x_i|\right)$

και αν $\lim_{|\Delta| \to} \Sigma(f, a, b, \Delta, \Xi) = I \in \mathbb{R}$ τότε : $\int_a^b f(x)\,dx = I$

⤳ <u>ισχύουν</u> τα παρακάτω (χωρίς απόδειξη).

- Αν f συνεχής τότε είναι ολοκληρώσιμη
- Αν f μονότονη τότε είναι ολοκληρώσιμη.

* Ιδιότητες Ολοκληρωμάτων.

Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, ολοκληρώσιμες.

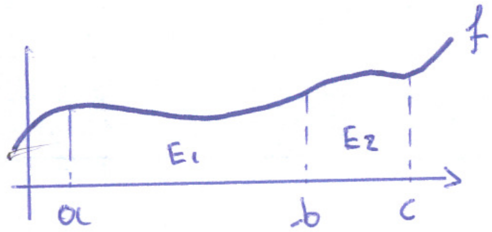
i) $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

iii) f,g ολοκληρώσιμες και αν $|f|\geq M>0$ τότε $\int_a^b \frac{1}{f}\,dx$ υπάρχει.

iv) Αν f,g ταυτίζονται εκτός από πεπερασμένο πλήθος σημείων.
τότε $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.

v) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$



* Ορισμός

Η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[a,b]$ αν υπάρχουν σημεία $t_0=a, t_1, t_2, \dots t_n=b$ τ.ω. η f συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής (t_i, t_{i+1}), $i=0,\dots,n-1$

π.χ $f(x)=[x]$ $\quad x\in[0,100]$.

ιδιότητες ⤳
vi) Αν f τμηματικά συνεχής στο $[a,b]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη.

vii) Αν $f\leq g$ τότε $\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$.

viii) Αν $f\leq g$ <u>και</u> $\int_a^b f\,dx = \int_a^b g\,dx$ τότε $f=g$.
f,g συνεχείς.

* παράδειγμα

$f(x)\geq \ell$ τότε $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b \ell\,dx = (b-a)\cdot\ell$.

ix) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ απόδειξη: από $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

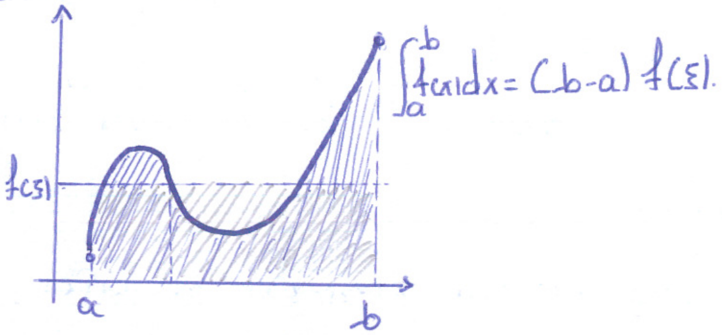
τότε $\int_a^b -|f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx \iff \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

* Θεώρημα Μέσης Τιμής (ολοκληρωτικού λογισμού).

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε $\exists \xi \in [a,b]$ τ.ω.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi).$$

~ Γεωμετρική Ερμηνεία:



* απόδειξη.

Επειδή f συνεχής στο $[a,b]$ από το Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής $\exists \zeta, \eta \in [a,b]$ τ.ω

$$f(\zeta) \le f(x) \le f(\eta) \Longrightarrow \int_a^b f(\zeta)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b f(\eta)dx.$$

$$\Longrightarrow f(\zeta)(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le f(\eta)(b-a).$$

$$\Longrightarrow f(\zeta) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le f(\eta)$$ Από Θ.Μ.Τ (διαφορικού λογισμού)

$\exists \xi$ τ.ω $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$ □

* Ορισμός

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$, αν $F'(x) = f(x)$ τότε η F είναι παράγουσα ή αντιπαράγωγος

* Ορισμός

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του I. Ορίζουμε:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + c \quad , x \in I$$ αόριστο ολοκλήρωμα

* Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε $[b,d] \subset I$ και έστω το αόριστο ολοκλήρωμα

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \ x \in I$$

αν f συνεχής σε κάποιο $\xi \in I$ τότε η F παραγωγίσιμη στο ξ και $F'(\xi) = f(\xi)$.

(Δηλαδή το αόριστο ολοκλήρωμα της f είναι παράγουσα της f).

"απόδειξη"

Έστω $\varepsilon > 0$ f συνεχής στο ξ άρα $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ για $x - \xi < \delta$ (κάποιο κατάλληλο δ) τότε:

$$\left| \frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} - f(\xi) \right| = \left| \frac{\int_\xi^x f(t)\,dt - f(\xi)(x-\xi)}{x - \xi} \right| \cdot$$

$$\left\{ \begin{aligned} F(x) - F(\xi) &= \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^\xi f(t)\,dt \\ &= \int_\xi^x f(t)\,dt \end{aligned} \right.$$

$$f(\xi)(x-\xi) = \int_\xi^x f(\xi)\,dt$$

$$= \frac{\left| \int_\xi^x (f(t) - f(\xi))\,dt \right|}{|x - \xi|} \le \frac{\int_\xi^x |f(t) - f(\xi)|}{|x - \xi|} \le \max_{t \in [\xi, x]} \frac{|f(t) - f(\xi)|\,|x - \xi|}{|x - \xi|}$$

$$\le \max_{t \in [\xi, x]} |f(t) - f(\xi)| < \varepsilon \quad \text{για} \ |x - \xi| < \delta. \qquad \square$$

Τετάρτη 27 Νοεμβρίου 2019.

*Αόριστο Ολοκλήρωμα. (παράγουσα της συνάρτησης)

Δηλαδή: $\int f(x) = F(x) + c$ όπου $F'(x) = f(x)$

~> ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$

*Παράδειγμα

i) $\int x^k\,dx = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + c \quad (k>0).$

ii) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

iii) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c.$

---

*Τεχνικές υπολογισμού ολοκληρωμάτων

i) Με αντικατάσταση: Αν I, J διαστήματα, $\varphi: I \to J$, $f: J \to \mathbb{R}$ και φ έχει συνεχή παράγωγο, f συνεχής.

Τότε: $\displaystyle \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy \Big|_{y=\varphi(x),\ \frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \Rightarrow \text{"} dy = \varphi'(x)dx \text{"}}$

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy$$

*παράδειγμα

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot\phi'(x)}{1+\phi(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y}\Big|_{y=\phi(x)} = \frac{1}{2}\ln(1+y)\Big|_{y=x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

$y = \phi(x) = x^2$

$\phi'(x) = 2x$

2) ολοκλήρωση κατα μέρη

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = -\int f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x)$$

*Παράδειγμα

$$\int \ln x\, dx = \int (\ln x)(x)'\, dx = -\int (\ln x)'\, x\, dx + x\cdot \ln x$$

$$= -\int \frac{1}{x} x\, dx + x\cdot \ln x = -x + x\cdot \ln x + c.$$

Για να το επαληθεύσουμε: $\frac{d}{dx}(-x + x\cdot \ln x + c) = \ln x.$

---

*Υπολογισμός ρητών συναρτήσεων

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k}, \quad k>1 \qquad \text{εαν } y=\phi(x)=x-a$$

$$= \int \frac{dy}{y^k}\Big|_{y=x-a} = \frac{1}{-k+1}\, y^{-k+1}\Big|_{y=x-a} = -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

- αν $k=1$ $\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C.$

αν έχουμε $\int \frac{(x-\mu)\, dx}{(\underbrace{(x-\mu)^2+\nu^2}_{y=\phi(x)=(x-\mu)^2+\nu^2})^k} = \int \frac{1}{2}\frac{d((x-\mu)^2+\nu^2)}{((x-\mu)^2+\nu^2)}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\phi'(x) = x-\mu$

$$\int \frac{\frac{1}{2}\phi'(x)}{\phi^k(x)}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^k}\Big|_{y=\varphi(x)} = \begin{cases} \text{αν } k=1 & \frac{1}{2}\ln|y| + c = \frac{1}{2}\ln|(x-\mu)^2+\nu^2| + c. \\ \text{αν } k>1 & -\frac{1}{2}\frac{1}{(k-1)y^{k-1}} + C = \frac{-1}{2(k-1)}\frac{1}{(x-\mu)^2+\nu^2} + C \end{cases}$$

$$\sim \int \frac{dx}{((x-\mu)^2+v^2)} \quad , \quad \text{έστω } \left(y=\frac{x-\mu}{v}\right) \quad dx = v\,dy$$

$$= \int \frac{dx}{v^{2k}\left(\left(\frac{x-\mu}{v}\right)^2+1\right)^k} = \int \frac{v\,dy}{v^{2k}(y+1)^k} = v^{1-2k}\underbrace{\int \frac{dy}{(y^2+1)^k}}_{= I_k}$$

$$I_2 = \int\frac{dy}{(y^2+1)^2} = \int \frac{1+y^2-y^2}{(y^2+1)^2}\,dy = \underbrace{\int\frac{1}{1+y^2}\,dy}_{I_1} - \int \frac{y^2\,dy}{(1+y^2)^2}$$

$$\hookrightarrow \int y\, \frac{y}{(1+y^2)^2}\,dy = -\frac{1}{2}\int y\left(\frac{1}{y^2+1}\right)' dy$$

$$\left(\frac{1}{y^2+1}\right)' = -\frac{2y}{(y^2+1)^2}$$

ολοκ. κατά μέρη $= \frac{1}{2}\int\frac{(y)'\,dy}{1+y^2} - \frac{1}{2}\,\frac{y}{1+y^2}$

$$= \frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{2}\,\frac{y}{1+y^2}$$

Επομένως $I_2 = I_1 - \left(\frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{2}\,\frac{y}{1+y^2}\right)$

$$= \frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{2}\,\frac{y}{1+y^2} = \frac{1}{2}\arctan y - \frac{1}{2}\,\frac{y}{1+y^2} + C$$

---

* Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

• $\int\frac{1}{\sin x}\,dx = I$ $\quad u=\tan\frac{x}{2}$

* τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\begin{cases} \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\ \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$(**)\ \left\{ \begin{aligned} \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} \\ &= \cos^2\frac{x}{2}\cdot 2\cdot\tan\frac{x}{2} \end{aligned} \right\}$$

και $\tan^2\frac{x}{2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = u^2$

οπότε $\cos^2\frac{x}{2}\cdot u^2 = 1-\cos^2\frac{x}{2}$

$$\cos^2\frac{x}{2}(1+u^2) = 1 \Longrightarrow \left\{\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+u^2}\right\}^{(**)}$$

Συνεπώς από (**)

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

και $\frac{du}{dx} = \left(\tan\frac{x}{2}\right)' = \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)' = \frac{\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$

$$= \frac{1+u^2}{2} \quad , \quad \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2} \Longrightarrow dx = \frac{2\,du}{1+u^2}$$

$$I = \int \frac{1+u^2}{2u}\,\frac{2\,du}{1+u^2} = \int \frac{du}{u}\,\Bigg|_{u=\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

* Τύπος Taylor ολοκληρωτικό υπόλοιπο

*** Θεώρημα**

$n\in\mathbb{N}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $\xi \in I$ f έχει $(n+1)$ συνεχείς παραγώγους στο I (και στα άκρα) τότε $\forall x \in I$:

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)(x-\xi)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_{\xi}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

*** απόδειξη**

Ολοκληρώνουμε (διαδοχικά) κατά μέρη το $\int_{\xi}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$