Δευτέρα 2 Δεκεμβρίου 2019.

* Σειρές

Έστω η ακολουθία $x_1, x_2, \dots, x_n$

$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ (= ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της (x_n))

Αν η S_n συγκλίνει τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$$

*Παραδείγματα

• $1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots$ $(|a|<1)$, $x_n = a^n$, $S_n = \sum_{i=0}^{n} x^i$

• $S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-a}$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$

Συνεπώς: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

• $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = ?$ $\quad x_n = (-1)^{n+1}$

Για να συγκλίνει η σειρά πρέπει να συγκλίνει η

$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{(-1)^{n+1}+1}{2}$ δεν συγκλίνει

Άρα και η σειρά $\sum_{i=1} x_i$ δεν συγκλίνει.

$S_1 = 1$
$S_2 = 0$
$S_3 = 1$
$S_4 = 0$

*Πρόταση

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει τότε $x_n \to 0$

*απόδειξη

$S_n \to \ell \in \mathbb{R}$, $S_{n-1} \to \ell$ όμως $x_n = S_n - S_{n-1} \to \ell - \ell = 0$.

~> Το αντίστροφο δεν ισχύει αναγκαστικά

***Πρόταση** Αν $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει και $r_n = \sum_{m=n}^{\infty} x_m$ τότε $r_n \to 0$. (η "ουρά" συγκλίνουσας σειράς πάει στο 0)

***απόδειξη**
Έστω $S_n = x_1 + \dots + x_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$ δηλαδή $S_n \to S$

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} x_m = S_{n+1} + r_n \implies r_n = S - S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

***Πρόταση:** Έστω $\sum x_n$, $\sum y_n$ συγκλίνουν

i) $\sum (x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$

ii) $\sum (\lambda x_n) = \lambda \sum x_n$

iii) $x_n \le y_n \implies \sum x_n \le \sum y_n$

---

*Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Έστω $x_n \ge 0$ $\forall n$. Τότε η $\sum x_n$ είτε συγκλίνει σε αριθμό είτε αποκλίνει στο $+\infty$, διότι η S_n είναι αύξουσα

***Πρόταση** i) Έστω $0 \le x_n \le y_n$. Αν η $\sum y_n$ συγκλίνει $\implies \sum x_n$ συγκλίνει

(διότι $\sum^n x_i \le \sum^n y_i$ άρα $\sum^n x_i$ φραγμένη άρα συγκλίνει διότι είναι και αύξουσα)

Αν $\sum x_n \to +\infty$ τότε και $\sum y_n \to +\infty$

ii) Αν $\left|\frac{x_n}{y_n}\right| < C$ τότε αν $\sum y_n$ συγκλίνει $\implies \sum x_n$ συγκλίνει.
αν $\sum x_n$ δεν συγκλίνει $\implies \sum y_n$ δεν συγκλ.

Η σχέση $\left|\frac{x_n}{y_n}\right| < C$ ικανοποιούνται αν $\lim \frac{x_n}{y_n} = \ell \in \mathbb{R}$

***Παράδειγμα**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot 3}{3^{n-1} \cdot 3} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ~ γεωμετρική σειρά άρα συγκλίνει.

$x_n = \frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$, $y_n = \frac{2^n}{3^{n-1}}$, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{(2^n+3)\cdot 3^{n-1}}{(3^{n-1}+n)\, 2^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\qquad n! = 1\cdot 2 \cdots n > 1\cdot 2\cdot 2 \cdots 2 = 2^{n-1}, \quad n \geq 1$

όποτε $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n \geq 1$

$\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ συγκλίνει ως γεωμετρική σειρά

Άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ συγκλίνει

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \longrightarrow e$

---

* Ολοκληρωτικό Κριτήριο $(x_n)\downarrow, \ x_n \geq 0$

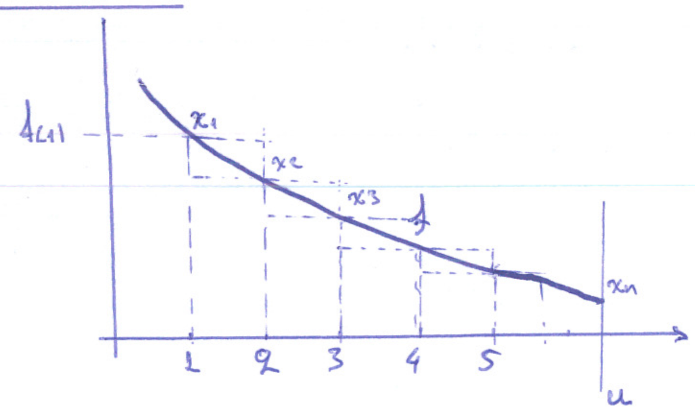
Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f: [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ τ.ω $f(n) = x_n$.

Τότε:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty \quad , \quad \lim_{u\to+\infty} \int_1^u f(t) < +\infty$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty \quad , \quad \lim_{u\to+\infty} \int_1^u f(t) = +\infty$

απόδειξη



$x_1 + x_2 + \dots + x_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$

$= f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \dots + f(n)\cdot 1$

Τετάρτη 4 Δεκεμβρίου 2019.

*Ολοκληρωτικό κριτήριο

Έχουμε $(x_n)\downarrow$, $x_n \geq 0$, $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$f(n) = x_n$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει $\iff \lim_{u \to +\infty} \int_1^u f(x)\,dx$ υπάρχει.

* <u>εφαρμογή</u>

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p>0$ $\qquad$ ~ για $p \leq 0$ η σειρά προφανώς αποκλίνει.

διότι $\frac{1}{n^p} \to +\infty$

~ για $p>0$ $\left(\frac{1}{n^p} \to 0\right)$ για να δείξουμε ότι η σειρά ότι συγκλίνει:

Έστω $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $\frac{1}{n^p} = f(n)$ $\qquad f(n)\downarrow$

οπότε $\int_1^u f(x)dx = \int_1^u x^{-p} = \begin{cases} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^u & p \neq 1 \\ \left.\ln x\right|_1^u & p=1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{u^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} & p \neq \\ \ln u & p=1 \end{cases}$

Υπολογίζουμε τα όρια:

για $p \neq 1$ $\quad \lim_{u \to +\infty} \int_1^u f(x)dx = \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{u^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right)$

άρα $\quad$ αν $p>1$ τότε το παραπάνω όριο $= \frac{1}{p-1} < +\infty$

αν $p<1$ τότε -||- $= +\infty$ αποκλίνει η σειρά.

αν $p=1$ $\quad \lim_{u \to +\infty} \int_1^u f(x)dx = \lim_{u \to +\infty} (\ln u) = +\infty$

Συνεπώς η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει για $p>1$ και αποκλίνει για $p \leq 1$

Μεγαλύτερο αντίπαλος. $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ ~ αρμονική σειρά. $(p=1)$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{n^3+n}$ $\qquad x_n = \frac{n^2+5}{n^3+n}$ $\qquad$ Κριτήριο σύγκρισης:

$$\frac{x_n}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{n^2+5}{n^3+n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^3+5n}{n^3+n} \longrightarrow 1$$ Επομένως η σειρά αποκλίνει.

---

* Κριτήριο Συμπύκνωσης

Έστω $(x_n)\downarrow$, $x_n \geq 0$, τότε

$\sum x_n$ συγκλίνει $\iff$ $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x_{2^k}$ συγκλίνει.

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{x_1}+\underbrace{x_2+x_3}+\underbrace{x_4+x_5+\dots+x_7}+\underbrace{x_8+\dots+x_{15}} \\ \leq x_1+2x_2+4x_4+\dots+2^k x_{2^k} \end{array}\right\}$$ $x_k \geq x_{k+1}$ η Ιδέα.

$$x_1+2x_2+4x_4+\dots+2^k x_{2^k} \leq 2x_1+2x_2+2(x_3+x_4)+\dots = 2(x_1+x_2+\dots+x_{2^k})$$

***Παράδειγμα**

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ η σειρά συγκλίνει εφόσον η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}}$ συγκλίνει

$= \sum \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$ γεωμετρική σειρά με $a = \frac{1}{2^{p-1}}$

Για να συγκλίνει πρέπει $a<1$ δηλαδή $\frac{1}{2^{p-1}}<1 \iff 2^{p-1}>1$

$\iff p>1$

---

* Σειρές με γενικούς όρους (όχι απαραίτητα ≥ 0)

***Ορισμός**

Η σειρά $\sum x_n$ συγκλίνει απόλυτα αν η σειρά $\sum |x_n|$ συγκλίνει.

Αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει.

*απόδειξη

Έστω $0 \le x_n + |x_n| \le 2|x_n|$ και

$$\Sigma(x_n + |x_n|) \le 2\Sigma|x_n|$$

συγκλίνει οπότε $\Sigma(x_n+|x_n|) - \Sigma|x_n| = \Sigma x_n$ συγκλίνει

και $|\Sigma x_n| \le \Sigma|x_n|$

---

*Ορισμός

Η Σx_n συγκλίνει υπό συνθήκη αν η Σx_n συγκλίνει αλλά η $\Sigma|x_n|$ αποκλίνει.

Κριτήριο λόγου (D'Alambert)

Έστω ότι $\lim\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = a$ τότε

i) Αν $a<1$ η Σx_n συγκλίνει απόλυτα.

ii) $a>1$ η Σx_n αποκλίνει.

iii) $a=1$ το κριτήριο δεν μας λέει τίποτα.

"απόδειξη"

Έστω ότι $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \longrightarrow a<1$ Αυτό έχει ως συνέπεια ότι από ένα n_0 και μετά ισχύει

$$\begin{cases} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < b < 1 & \left(\begin{matrix} b = a+\varepsilon \\ \text{για } \varepsilon \text{ μικρό}\end{matrix}\right) \\ |x_{n+1}| < b|x_n| \\ |x_{n+2}| < b|x_{n+1}| < b^2|x_n| \\ |x_{n+3}| < \dots < b^3|x_n| \\ \vdots \end{cases}$$

άρα $\sum_{k=1}^{\infty}|x_{n+k}| < |x_n|\sum_{k=1}^{\infty}b^k$ γεωμετρ. σειρά $\to +\infty$

Επομένως η σειρά συγκλίνει.

*παράδειγμα

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0<1$ Άρα η σειρά συγκλίνει.

$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ $\qquad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)\ n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e > 1$

Άρα η σειρά αποκλίνει.

---

* <u>Κριτήριο Ρίζας.</u> (Cauchy)

Έστω $\sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow a$ i) αν $a<1$ η σειρά συγκλίνει απόλυτα

ii) αν $a>1$ -ΙΙ-   αποκλίνει.

$(|a_n| \sim a^n)$

* <u>παράδειγμα</u>

$\sum \frac{n^3}{9^n}$, $\sqrt[n]{\frac{n^3}{9^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{9} \longrightarrow \frac{1}{9} < 1$

---

* <u>Κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.</u>

Έστω $(b_n)\downarrow$, $b_n \geq 0$

Η $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ συγκλίνει

$\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, $p>0$ συγκλίνει   για $0<p\leq 1$ η σειρά συγκλίνει υποσυνθήκη.