Δευτέρα 9 Δεκεμβρίου 2019.

***Πρόταση** Αν η (b_n) είναι ≥ 0 και $b_n \downarrow 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

***Παράδειγμα**

• Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει. ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

άρα συγκλίνει υπό συνθήκη

• Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ $p>0$ συγκλίνει $\forall p>0$. για $p>1$ έχουμε σύγκλιση
για $p<1$ έχουμε σύγκλιση υπό συνθήκη.

---

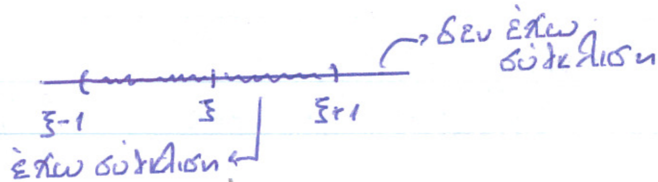
* Δυναμοσειρές

***Ορισμός** Η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = a_0 + a_1(x-\xi) + a_2(x-\xi)^2$
ονομάζεται δυναμοσειρά με κέντρο ξ και συντελεστές $a_1, a_2, a_3, \ldots$

***Παράδειγμα**

Γεωμετρική δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} (x-\xi)^n$ συγκλίνει όταν $|x-\xi|<1$

$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a^n \text{ συγκλίνει όταν } |a|<1 \right\}$



Έστω $\xi=0$ τότε έχω σύγκλιση για $|x|<1$ και $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $x \in (-1,1)$.

***Ορισμός** Τα x για τα οποία μια δυναμοσειρά συγκλίνει λέγεται σύνολο σύγκλισης.

***Πρόταση**

Για κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\xi)^n$ υπάρχουν ακριβώς 3 περιπτώσεις:

(i) Σύνολο σύγκλισης $= (-\infty, +\infty)$ $(R=+\infty)$

(ii) Σύνολο σύγκλισης $= \{\xi\}$ $(R=0)$

(iii) Σύνολο σύγκλισης είναι $(\xi-R, \xi+R)$, ή $[\ ,\ )$ ή $(\ ,\ ]$ ή $[\ \ ]$

Άρα έχουμε διάστημα σύγκλισης. και μάλιστα η σύγκλιση είναι απόλυτη! Το R λέγεται ακτίνα σύγκλισης.

*Παραδείγματα

• $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-\xi)^n$ Έστω ότι για $x=x_1$ έχω σύγκλιση δηλαδή η $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x_1-\xi)^n$ συγκλίνει. Συνεπώς $n^n(x_1-\xi)=b_n \longrightarrow 0$

άρα είναι φραγμένη δηλ. $n^n|(x_1-\xi)^n|<M \Longrightarrow |(x_1-\xi)^n|<\frac{M}{n^n}$

$|x_1-\xi|<\frac{\sqrt[n]{M}}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow 0}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ $x_1=\xi$. Άρα $R=0$.

---

*Πρόταση

Έστω $a_n\neq 0$ και $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\longrightarrow \mu$. Τότε η ακτίνα σύγκλισης της $\sum a_n(x-\xi)^n$ είναι $R=\frac{1}{\mu}$

*απόδειξη

Αποκριτήριο λόγου $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-\xi| \longrightarrow |x-\xi|\mu$.

άρα αν $|x-\xi|\cdot\mu<1$ έχω σύγκλιση της σειράς δηλαδή $|x-\xi|<\frac{1}{\mu}=:R$ ενώ αν $|x-\xi|>\frac{1}{\mu}$ έχω απόκλιση της σειράς.

*Πρόταση

Αν $\sqrt[n]{|a_n|}\longrightarrow\mu$ τότε $R=\frac{1}{\mu}$ *απόδειξη*: παρόμοια με το παραπάνω.

*παράδειγμα

(*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}\longrightarrow 1$ άρα $R=1$

σίγουρα έχουμε σύγκλιση για $x\in(-1,1)$.

Ελέγχω τα άκρα του διαστήματος.

Για $x=1$ έχω $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει

Για $x=-1$ έχω $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει.

Άρα διάστημα σύγκλισης της (*) = $[-1,1)$

*Παραδείγματα

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \cdot x^n$ $\quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ $\quad R=+\infty$

και διάστημα σύγκλισης $= (-\infty,+\infty)$.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ $\quad R=+\infty$

και διάστημα σύγκλισης $= (-\infty,+\infty)$.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \longrightarrow 1$ ακτίνα σύγκλισης $R=1$.

Για $x=1$ έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Για $x=1$ έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ συγκλίνει.

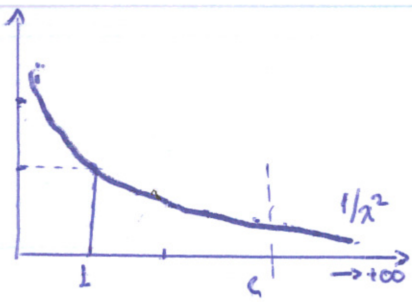
Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι $[-1,1]$.

*Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη $\quad [a,b]$ κλειστό και φραγμένο.

$\int_a^b f(x)dx =$ ολοκλήρωμα Riemann.

→ Τι συμβαίνει όταν έχουμε $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (i) ή $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ (ii).



• $\int_1^c \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^c = (-\frac{1}{c}+1 = 1-\frac{1}{c} \xrightarrow[c\to+\infty]{} 1$

• $\int_1^c 1\,dx = c-1 \xrightarrow[c\to+\infty]{} +\infty$

• $\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2 \cdot x^{1/2}\Big|_c^1 = 2(1-\sqrt{c})$

$\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$ Άρα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$.

* **Ορισμός**

Έστω $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[a,c]$ του $[a,b)$

Αν το $\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$ υπάρχει τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$ υπάρχει.

Τετάρτη 11 Δεκεμβρίου 2019.

~> Εάν έχουμε $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_1^c f(x)\,dx$ Γενικευμένο ολοκλήρωμα.

** παράδειγμα*

• $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^c = \lim_{c\to+\infty}\left(1-\frac{1}{c}\right)=1$

• $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1+\sqrt{x}}\,dx$ υπάρχει;

* Κριτήρια ύπαρξης γενικευμένου ολοκληρωμάτων

Έστω $f\geq 0$ $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ υπάρχει;

το $F(c)=\int_1^c f(x)\,dx$ αυξάνει καθώς το c μεγαλώνει.
$F(c)$ είναι αύξουσα
άρα αν εξασφαλίσω ότι $F(c)\leq M$ $\forall\, c>0$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει.
Αν π.χ. $f(x)\leq g(x)$ και το $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ υπάρχει τότε και το $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ υπάρχει.

Αρκεί $\frac{f(x)}{g(x)} \to \ell\in\mathbb{R}$ $(g(x)\neq 0)$ ώστε αν $\int_1^{+\infty} g(x)<\infty$ τότε και $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx<+\infty$

* από το προηγούμενο παράδειγμα

$\frac{1}{x^2+x+1+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2}$ Αφού $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ υπάρχει τότε και $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1+\sqrt{x}}\,dx$ υπάρχει.

~> Απλές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται για σύγκριση:

1) $\int_1^c \frac{1}{x^p} = \begin{cases}\ln c, & p=1\\ \frac{1}{p-1}\left(1-c^{-p+1}\right), & p\neq 1\end{cases}$ και $p>1 \Longrightarrow \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=\frac{1}{p-1}$

$p<1 \Longrightarrow \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}=+\infty$

άρα $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ υπάρχει $p>1$
και αποκλίνει στο $+\infty$ $p\leq 1$

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2-x-10\sqrt{x}}dx$ συγκρίνουμε με $\frac{1}{x^2}$

$$\frac{\frac{1}{x^2-x-10\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2-x-10\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{10}{\sqrt{x}})} \longrightarrow 1$$

οπότε η $\frac{1}{x^2-x-10\sqrt{x}}$ έχει ίδια συμπεριφορά με την $\frac{1}{x^2}$.

$$\Longrightarrow \frac{\frac{1}{x^2-x-10\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^2}} < c \Longrightarrow \frac{1}{x^2-x-10\sqrt{x}} < \frac{c}{x^2}$$

~ $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & p<1 \\ +\infty & p\geq 1 \end{cases}$ $\left(\text{το } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx \text{ δεν μπορεί να υπάρχει } (\forall p\in\mathbb{R})\right)$

$p>0$

- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}$, $\frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)} < \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ οπότε $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} < +\infty$

~ Γενικά αν $f\geq 0$, $g>0$, $\int_0^1 g(x)dx < +\infty$ και $\lim_{x\to 0^+} \frac{f}{g} = l \in \mathbb{R}$

τότε και $\int_0^1 f(x)dx < +\infty$.

$(a>0)$

~ $\int_0^c e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^c = \frac{1-e^{-ac}}{a} \xrightarrow{c\to+\infty} \frac{1}{a}$ άρα $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \frac{1}{a}$

<u>Παραδείγματα</u>

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2}dx$ $\quad \frac{e^{-x}}{1+x^2} < e^{-x}$ τότε $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2} < \int_0^{+\infty} e^{-x}dx < +\infty$.

- $\int_0^1 \frac{1}{x(1+x^2)}dx$ είναι σαν $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ δεν υπάρχει.

$$\frac{\frac{1}{x(x^2+1)}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x\to 0} 1 \in \mathbb{R} \quad \text{αφού } \int_0^1 \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x(1+x^2)} = +\infty$$

$\cdot \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$

Υπολογίζουμε $= \sin x \geq 0 \quad x \in [2\kappa\pi, 2\kappa\pi+\pi]. \ \kappa > 0$

$$\int_{2\kappa\pi}^{2\kappa\pi+\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_{2\kappa\pi}^{2\kappa\pi+\pi} \frac{\sin x}{2\kappa\pi+\pi} dx = \int_{2\kappa\pi}^{2\kappa\pi+\pi} \sin x dx \cdot \frac{1}{(2\kappa+1)\pi}$$

$$= -\cos x \Big|_{2\kappa\pi}^{2\kappa\pi+\pi} \cdot \frac{1}{(2\kappa+1)\pi} = 2 \cdot \frac{1}{(2\kappa+1)\pi}$$

$$\int_{2\kappa\pi}^{2\kappa\pi+\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{(2\kappa+1)\pi}$$

παρόμοια έχω ότι $\int_{(2\kappa+1)\pi}^{(2\kappa+2)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{(2\kappa+2)\pi}$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχω

$$\int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{2}{(n+1)\pi} \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx > \int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$ ⇝ αποκλίνει

Άρα και $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}$ αποκλίνει.

⇝ $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ⇝ Γενικευμένα ολοκληρώματα όπου η συνάρτηση αλλάζει πρόσημο.

παίρνουμε $\int_1^c \frac{\sin x}{x} dx = -\int_1^c \frac{(\cos x)'}{x} dx = \int_1^c \cos x \left(\frac{1}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x}\Big|_1^c$

$$= \underbrace{-\int_1^c \frac{\cos x}{x^2}}_{\substack{\text{υπάρχει} \\ \xrightarrow[c \to +\infty]{}}} + \underbrace{\cos 1}_{\text{σταθ.}} - \underbrace{\frac{\cos c}{c}}_{\to 0} = -\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} + \cos 1 < +\infty$$

$$\left| \int_1^c \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \leq \int_1^c \frac{|\cos x|}{x^2} dx \leq \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{c}$$

Συνεπώς $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ υπάρχει. <u>σύγκλιση υπό συνθήκη</u>

Κριτήριο Dirichlet

Έστω $f, g : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, f συνεχής, και η g έχει συνεχή παράγωγο.

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Αν g φθίνουσα με $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

και F φραγμένη τότε $\int_a^{+\infty} f \cdot g\,dx$ υπάρχει π.χ. $g(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sin x$

άρα $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ υπάρχει.