Δευτέρα 30 Σεπτεμβρίου 2019 ~ Όρια Ακολουθιών.

* Ορισμός: Λέμε ότι η x_n αποκλίνει (ή τείνει) στο $+\infty$ όταν: $\forall M>0$ (Μ αρκετά μεγάλο) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$x_n > M \text{ για } n \geq n_0$$

* παραδείγματα

i) $a_n = n^a$, $a>0$ Θα αποδείξουμε ότι $a_n \to +\infty$

Απόδειξη: Θέλουμε να έχουμε $n^a > M \iff n > M^{1/a}$. Επειδή ο $M^{1/a}$ δεν ξέρουμε ότι ανήκει στους φυσικούς $\mathbb{N}$, Επιλέγουμε $n_0 = [M^{1/a}]+1$. Τώρα αν $n \geq n_0 = [M^{1/a}]+1 > M^{1/a} \Rightarrow n^a > M$ άρα σύμφωνα με τον ορισμό έχω ότι $a_n \to +\infty$ □ ~ τέλος.

ii) $a_n = \ln n$. Έστω ότι από κάποιο n_0 και μετά είναι $\ln n > M \iff n > e^M$. Επιλέγουμε $n_0 = [e^M]+1$. Τώρα αν $n \geq n_0$ έχουμε $n^a > M$ Συνεπώς $a_n \to +\infty$ □

* Ορισμός: Λέμε ότι η x_n αποκλίνει στο $-\infty$ όταν: $\forall M>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$x_n < -M \text{ για } n \geq n_0$$

* παράδειγμα

$x_n = \dfrac{n^2+n}{n+3}$ Θα αποδείξουμε ότι $x_n \to +\infty$

~> Σε πολύπλοκες ακολουθίες μας βοηθά να βρίσκουμε πιο απλές ακολουθίες a_n ώστε $x_n > a_n$ (σε αυτή την περίπτωση $x_n \to +\infty$), $x_n < a_n$ στην περίπτωση που θέλουμε ν.α.ο $x_n \to -\infty$).

Έστω ότι $M>0$ Θέλουμε $\dfrac{n^2+n}{n+3} > M$ έχουμε όμως

$\dfrac{n^2+n}{n+3} > \dfrac{n^2}{n+3} > \dfrac{n^2}{n+3n} > \dfrac{n}{4}$, οπότε Θέλουμε $\dfrac{n}{4} > M$. Επιλέγουμε

$n_0 = [4M]+1$ και αν $n \geq n_0$ τότε $\dfrac{n^2+n}{n+3} > M$ και $x_n \to +\infty$ □

* Ισότητες ορίων.

a) Αν δύο υποακολουθίες είναι ίσες από έναν όρο και μετά τότε έχουν το ίδιο όριο (εφόσον συγκλίνουν)

*Παράδειγμα

αν $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ και $y_n = \begin{cases} n & \text{για } n = 1, 2, \dots, 10^6 \\ \frac{1}{n} & \text{για } n \geq 10^6 + 1 \end{cases}$

Οι x_n και y_n ταυτίζονται για $n \geq 10^6 + 1$
επομένως έχουν το ίδιο όριο $x_n, y_n \to 0$.

b) Υποακολουθίες.

Έστω άπειροι αριθμοί $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ τότε η (x_{n_k}) λέγεται υποακολουθία

~ Παρατήρηση: $n_k \geq k$ δηλαδή αν $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots$ τότε μια υποακολουθία είναι: x_2, x_5, x_7, x_{11}

$x_2 \to x_{n_1}$, $x_5 \to x_{n_2}$, $x_7 \to x_{n_3}$, $x_{11} \to x_{n_4}$

$k = 1, 2, 3, 4, \dots$

$n_k = n_1, n_2, n_3, \dots$

---

*Πρόταση:
Αν μια ακολουθία έχει όριο τότε όλες οι υποακολουθίες έχουν το ίδιο όριο.

*Πόρισμα: Αν μια ακολουθία έχει δύο υποακολουθίες με διαφορετικά όρια τότε η ακολουθία δεν

~ • Οι υποακολουθίες μας βοηθούν να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία δεν συγκλίνει
• Η υποακολουθία μια ακολουθίας είναι με τη σειρά της ακολουθία.

*Παράδειγμα

$a_n = (-1)^n$ Θεωρούμε τις υποακολουθίες $a_{2n} = 1$ ~ άρτιοι δείκτες στη και $a_{2n+1} = -1$ περιττούς δείκτες

άρα $\left.\begin{array}{l} a_{2n} \to 1 \\ a_{2n+1} \to -1 \end{array}\right\}$ έχουμε δύο υποακολουθίες με διαφορετικά όρια επομένως η a_n δεν συγκλίνει.

γ) Αλγεβρικές ιδιότητες ορίων

i) Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $(-x_n) \to -x$

ii) Αν $x_n \to x$, $y_n \to y$ τότε $x_n + y_n \to x+y$

⇝ Απόδειξη της ii

Έστω $\varepsilon > 0$ τότε επειδή $x_n \to x$, υπάρχει $n_0' \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|x_n - x| \overset{(1)}{<} \varepsilon/2$ όταν $n \geq n_0'$

Επίσης επειδή $y_n \to y$, $\exists n_0'' \in \mathbb{N}$ τ.ω $|y_n - y| < \varepsilon/2$ όταν $n \geq n_0''$

Έστω τώρα ότι $n \geq \max\{n_0', n_0''\} = n_0$ (για να ισχύουν (1),(2) ταυτόχρονα)

Τότε για $n \geq n_0$ έχω ότι:

$$|(x_n + y_n) - (x+y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

τριγωνική ανισότητα

Άρα από τον ορισμό του ορίου $x_n + y_n \to x + y$ □

iii) $x_n \to x \in \mathbb{R}$, $y_n \to \pm\infty$ τότε $x_n + y_n \to \pm\infty$

iv) $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty \implies x_n + y_n \to +\infty$

⇝ Απροσδιόριστη μορφή

π.χ. $x_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$ τότε $x_n + y_n$: απροσδιόριστη μορφή

Τετάρτη 2 Οκτωβρίου 2019

* Ιδιότητες ορίων ακολουθιών (συνέχεια)

(1) • <u>Κανόνας γινομένου</u>: Αν $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x, y \in \mathbb{R}$ τότε $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$

⇝ <u>παράδειγμα</u>

Αν $x_n \to x$ και $c \in \mathbb{R}$ τότε $c \cdot x_n \to c \cdot x$

ακόμη $x_n^2 \to x^2$, παρόμοια $x_n^k \to x^k$

---

(2) • <u>Κανόνας αντιστρόφου</u>: Έστω $x_n \to x$ και αν $x_n \neq 0$, $x \neq 0$ τότε

$$\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$$

αν τώρα $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ και $\begin{cases} \text{αν } x_n > 0 \text{ τότε } \frac{1}{x_n} \to +\infty \\ \text{αν } x_n < 0 \text{ τότε } \frac{1}{x_n} \to -\infty \end{cases}$

Συνέπεια των (1) και (2) έχουμε:

$x_n \to x$, $y_n \to y$, $y_n, y \neq 0$ τότε $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$

Προσοχή: στις απροσδιόριστες μορφές $\left(\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty} \text{ κτλ}\right)$

⇝ <u>παράδειγμα 1</u>

i) $$a_n = \frac{n^2+n+1}{3n^2+2n+5} = \frac{n^2\left(1+\overbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}^{\to 0}\right)}{n^2\left(3+\underbrace{\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}_{\to 0}\right)}$$ με χρήση των ιδιοτήτων

Άρα $a_n \to 1/3$

ii) $$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}_{\to +\infty}} \xrightarrow{\frac{1}{+\infty}} 0$$

• <u>Όρια και ανισότητες</u>

* Πρόταση $x_n \to +\infty$, $y_n \geq x_n \Rightarrow y_n \to +\infty$

$x_n \to -\infty$, $y_n \leq x_n \Rightarrow y_n \to -\infty$

• <u>Κανόνας παρεμβολής</u>: Αν $x_n \leq y_n \leq z_n$ και $x_n \to l$, $z_n \to l \Rightarrow y_n \to l$

⇝ <u>παράδειγμα</u>

$$a_n = \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$$

Ξέρουμε ότι (1) $[\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$, (2) $[\sqrt{n}]+1 > \sqrt{n}$ — Από ορισμό ακέραιου μέρους.

$$(2) \Rightarrow \sqrt{n} \geq [\sqrt{n}] > \sqrt{n}-1 \Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \geq \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \geq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \to 1$$

1

Επομένως $a_n \to 1$.

* Πρόταση $x_n \to 0$, y_n φραγμένη τότε $x_n \cdot y_n \to 0$

Απόδειξη

Έχω ότι $|y_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Έστω $\varepsilon > 0$ Επειδή $x_n \to 0$ έχω ότι όταν $n \geq$ κάποιο n_0

$|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Τότε όμως έχω για $n \geq n_0$ $|x_n y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$ □

---

* Πρόταση Αν $x_n \to x$ και $x < u$ ~~τότε~~ τελικά (από ένα δείκτη n_0 και μετά) $x_n < u$. Αντίστοιχα ($x > \ell$, $x_n > \ell$).

→ Παράδειγμα

Ισχύει $\frac{n^2+3n}{2n^2+5} < \frac{3}{5}$ τελικά;

$$\frac{n^2+3n}{2n^2+5} = \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{5}{n^2}\right)} \longrightarrow 1/2 < 3/5$$ άρα τελικά η ανισότητα ισχύει.

---

* Πρόταση Αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε είναι φραγμένη (συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό)

Απόδειξη

Έστω $x_n \to x \in \mathbb{R}$. άρα επιλέγοντας $\varepsilon = 1$ $\exists n_0$ τ.ω $|x_n - x| < 1$ όταν $n \geq n_0$

Συμβαίνει ότι $-1 < x_n - x < 1 \iff -1 + x < x_n < 1 + x$

Επομένως $-1 - |x| < x_n < 1 + |x| \iff |x_n| < 1 + |x| \quad \forall n \geq n_0$

Έστω $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0-1}|, 1+|x|\}$ οπότε έχω ότι $|x_n| \leq M \quad \forall n \geq 1$

$\Longrightarrow (x_n)$ φραγμένη.

---

* Χρήσιμα Όρια

Ανισότητα Bernoulli : Αν $n = 1, 2, \dots$ και $x \geq -1$ $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Αποδεικνύεται με επαγωγή ισότητα μόνο αν $x = 0$ ή $x = 1$

→ Παράδειγμα

$x_n = a^n$, $a > 1$ Έχουμε ότι $a^n = (1 + \underbrace{(a-1)}_{>0})^n \geq 1 + (a-1)n \to +\infty$

τότε και $a^n \to +\infty$

Αν $0 < a < 1 \Longrightarrow \frac{1}{a} > 1$ άρα $\left(\frac{1}{a}\right)^n \to +\infty \Longrightarrow a^n \to 0$

Αν $a = 1$ τότε $x_n = 1 \to 1$

Αν $|a| < 1 \Longrightarrow a^n \to 0$

~ <u>Παράδειγμα</u>

$a>0$ $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$ Αν $a=1$ είναι προφανές

Έστω $a>1 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>1$ άρα έχω ότι $\sqrt[n]{a} = 1+\theta_n$ $\theta_n>0$

$\Rightarrow a=(1+\theta_n)^n \geq 1+n\theta_n$, $0<n\theta_n \leq a-1$

$\Leftrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} < \theta_n < \frac{a-1}{n} \longrightarrow 0$ Επομένως $\theta_n \longrightarrow 0$ και $\sqrt[n]{a} = 1+\theta_n \longrightarrow 1$