Δευτέρα 7 Οκτωβρίου 2019

* Χρήσιμα Όρια (συνέχεια)

i) $x_n = a^n$, αν $a > 1 \Rightarrow a^n \longrightarrow +\infty$

αν $|a| < 1 \Rightarrow a^n \longrightarrow 0$

ii) $x_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$ $\quad \sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$

• $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $(0 \leq k \leq n)$ ~> n ανά k

• $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, $0! = 1$ ~> n παραγοντικό

* Παράδειγμα

• $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = n$, $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$

• $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-2)} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

* Διωνυμικό Ανάπτυγμα

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

$$= a^n + n\,a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + n\,a\,b^{n-1} + b^n$$

---

iii) $x_n = \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$

Απόδειξη iii)

Έχουμε ότι $\sqrt[n]{n} > 1$ για $n \geq 2$. Άρα $n = 1 + \theta_n$, $\theta_n > 0$

υψώνοντας $\Longrightarrow$ ως προς n $\quad n = (1+\theta_n)^n = 1 + n\theta_n + \dfrac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 + \dots + \theta_n^n > 1 + \dfrac{n(n-1)}{2}\theta_n^2$

$\Longrightarrow \theta_n^2 \dfrac{n(n-1)}{2} < n-1 \Longrightarrow \theta_n^2 < \dfrac{2}{n} \Longrightarrow 0 < \theta_n < \sqrt{\dfrac{2}{n}} \Longrightarrow \theta_n \longrightarrow 0$

Τότε όμως έχουμε $\sqrt[n]{n} = 1 + \theta_n \longrightarrow 1$ ▫

* Παράδειγμα

$x_n = \sqrt[n]{n^k} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^k \longrightarrow 1^k = 1$ (με χρήση ιδιοτήτων)

αν $x_n \longrightarrow x$ τότε $x_n^k \longrightarrow x^k$

iv) $a>1$, $b>0$ $\quad \dfrac{a^n}{n^b} \longrightarrow +\infty$

Απόδειξη iv)

• Έστω $0<b<1$. Τότε $\dfrac{a^n}{n^b} = \dfrac{(1+(a-1))^n}{n^b} \overset{\text{ανισότητα Bernoulli}}{\geq} \dfrac{1+n(a-1)}{n^b} \geq (a-1)n^{1-b} \longrightarrow +\infty$

• Έστω $b \geq 1$. Τότε διαλέγω $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$0 < \dfrac{b}{k} < 1$. Τότε $\dfrac{(a^{1/k})^n}{n^{b/k}} \longrightarrow +\infty$ (από την πρώτη περίπτωση)

⇝ Υψώνω εις την k και έχω $\dfrac{a^n}{n^b} \longrightarrow +\infty$ ◻

v) $\dfrac{\log n}{n^b} \longrightarrow 0$, $b>0$

* Θεώρημα μονότονων ακολουθιών

. Έστω ακολουθία (a_n) αύξουσα και άνω φραγμένη τότε:
η (a_n) συγκλίνει

. Έστω ακολουθία (a_n) φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε:
η (a_n) συγκλίνει

* Παράδειγμα

Έστω η ακολουθία $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, $n \geq 1$

δηλαδή $1, \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$

Θέλουμε να μελετήσουμε ως προς τη σύγκλιση την (x_n)

⇝ Απόδειξη ότι η (x_n) είναι αύξουσα: $x_{n+1} \geq x_n \iff \sqrt{2x_n} \geq \sqrt{2x_{n-1}}$

$\iff x_n \geq x_{n-1} \iff x_{n-1} \geq x_{n-2} \iff \dots \iff x_2 \geq x_1$ που ισχύει

Άρα και $x_{n+1} \geq x_n$ ισχύει επομένως η (x_n) είναι αύξουσα

~> Απόδειξη ότι η (x_n) είναι φραγμένη

Έχουμε δείξει ότι $x_{n+1} > x_n \ \forall n \geq 1 \iff \sqrt{2x_n} \geq x_n$

$\iff 2x_n \geq x_n^2 \iff x_n \leq 2$. Αφού $1 \leq x_n \leq 2$ η (x_n) είναι φραγμένη

Άρα (x_n) αύξουσα και φραγμένη. Συνεπώς $x_n \to x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει

Έχουμε $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ Αφού $x_n \to x$ τότε και $x_{n+1} \to x$

$$x = \sqrt{2x} \iff x^2 = 2x \iff x(x-2) = 0$$

$x=0$ ή $x=2$

- Για $x=0$ απορρίπτεται αφού $x_n \geq 1 \ \forall n$

Άρα $x_n \to 2$. ■

---

* η Ακολουθία $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Η a_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Συνεπώς συγκλίνει

$a_n \to e$ ~ βάση του νεπέριου λογάριθμου.

*Πρόταση Η $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη

*απόδειξη:

*ανισότητα Bernoulli
$(1+x)^n \geq 1+nx$
$n\geq 1,\ x\geq -1$

• Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $a_{n+1}\geq a_n$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \iff \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\iff \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n}{n+1} \iff \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq \frac{n}{n+1} \quad (1)$$

* $$\left[\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} = \frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1} = 1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$$

Άρα ισοδύναμα (1) $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \geq \frac{n}{n+1}$ Όμως από ανισότητα Bernoulli

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Άρα $a_{n+1}\geq a_n$ Επομένως η a_n αύξουσα.

• Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η a_n είναι φραγμένη.

παίρνουμε $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2} = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n = \left(1-\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n$ → το φέραμε στην μορφή ώστε να χρησιμοποιήσουμε ανισ. Bernoulli.

αντίστροφη της $\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\geq 1-n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \geq 1-n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

$$= 1-\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$= 1-\sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 1-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = 1-1/2 = 1/2.$$

Άρα $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2} > \frac{1}{2} \iff \left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{1}{4}$

$\iff \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 4$ Η a_n είναι άνω φραγμένη

Άρα η a_n συγκλίνει και $a_n \to e \approx 2{,}73\ldots$

Δηλαδή $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \quad \forall n=1,2,\ldots$ ■

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

*Παραδείγματα - Ασκήσεις.

i) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{3n+5}$ Ξέρουμε ότι $\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{n+2} \longrightarrow e$

$3n+5 = 3(n+2)-1$

Άρα $\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{3n+5} = \left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{(n+2)\cdot 3} \cdot \left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{-1} = \underbrace{\left[\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^3}_{\downarrow\, e^3} \underbrace{\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{-1}}_{\downarrow\, 1}$

Συνεπώς $a_n \longrightarrow e^3$

ii) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n} = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n} = \dfrac{1}{\underbrace{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{\downarrow\, e}\underbrace{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)}_{\downarrow\, 1}}$

$\dfrac{n}{n-1} = \dfrac{n-1+1}{n-1} = 1+\dfrac{1}{n-1}$ Άρα $a_n \longrightarrow \dfrac{1}{e} = e^{-1}$

* Έστω $x \in \mathbb{R}$ $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \longrightarrow e^x$ Πιο γενικό όριο

Παράδειγμα Αν $a_n \to a$ $(a_n > 0,\ a \geq 0)$ τότε $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$

Έστω $a=0$. Έστω $\varepsilon>0$.
Επειδή $a_n \to 0$ έχω ότι $a_n < \varepsilon^2$ από $n \geq n_0$. Τότε όμως
$\sqrt{a_n} < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ συνεπώς $\sqrt{a_n} \to 0$
Έστω $a>0$
$(\sqrt{a_n}-\sqrt{a})(\sqrt{a_n}+\sqrt{a}) = a_n - a \longrightarrow |\sqrt{a_n}-\sqrt{a}| = \dfrac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} \leq \dfrac{|a_n-a|}{\sqrt{a}} \to 0$

$\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$ $\quad k \in \mathbb{N}$
Χρησιμοποιώντας $a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1})$

$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| = \dfrac{|a_n - a|}{(\sqrt[k]{a_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{a_n})^{k-2}\sqrt[k]{a} + \dots + (\sqrt[k]{a})^{k-1}} \leq \dfrac{|a_n-a|}{(\sqrt[k]{a})^{k-1}} \to 0.$