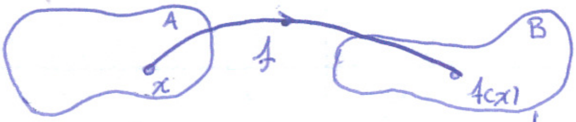
Δευτέρα 14 Οκτωβρίου 2019

* Συναρτήσεις.

Είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει το $x \in A$ στο $f(x) \in B$.



Το σύνολο των x λέγεται πεδίο ορισμού

Το σύνολο των $f(x) \in B$ λέγεται σύνολο τιμών

- Αν για την f έχω έναν τύπο χωρίς να μου λένε το πεδίο ορισμού (Π.Ο) τότε το Π.Ο. είναι όλα τα x για τα οποία ορίζεται ο τύπος.

* Παραδείγματα

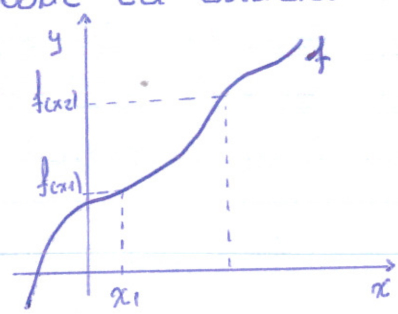
i) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

ii) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ Π.Ο $= \mathbb{R} \setminus \{\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$

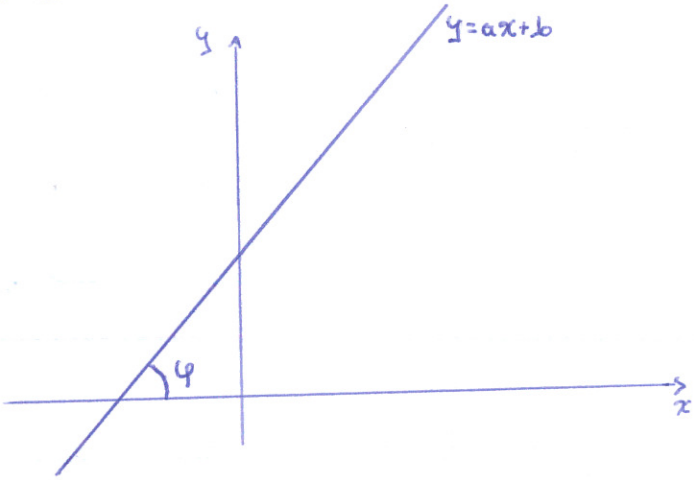
iii) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ Π.Ο $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

* Γραφήματα Συναρτήσεων

Για να σχεδιαστεί η f βάζουμε τα σημεία $(x, f(x))$

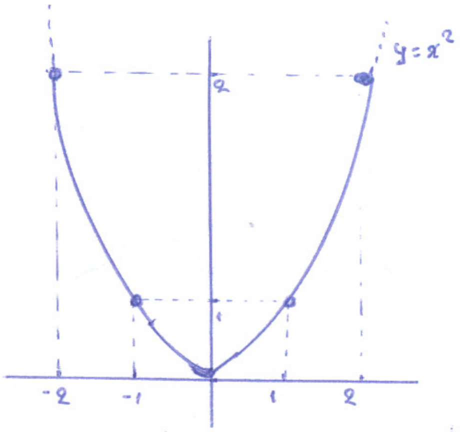


- $\underline{y = ax + b}$ a: κλίση της ευθείας δηλαδή $\varepsilon\varphi\varphi = a$



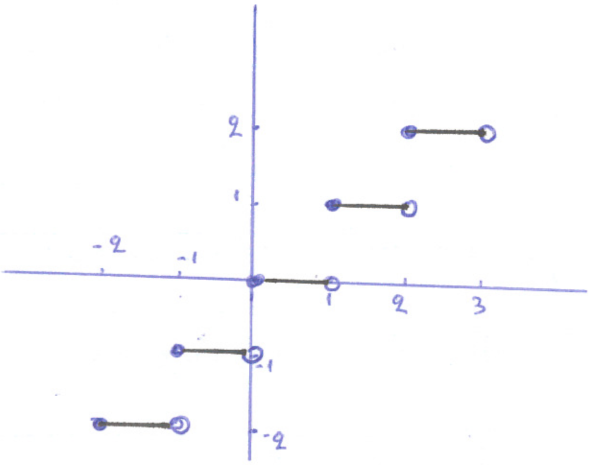
• $y = x^2$

~> $x=0,\ y=0$
$x=\pm 1,\ y=1$
$x=\pm 2,\ y=4$



• $f(x)=[x]$

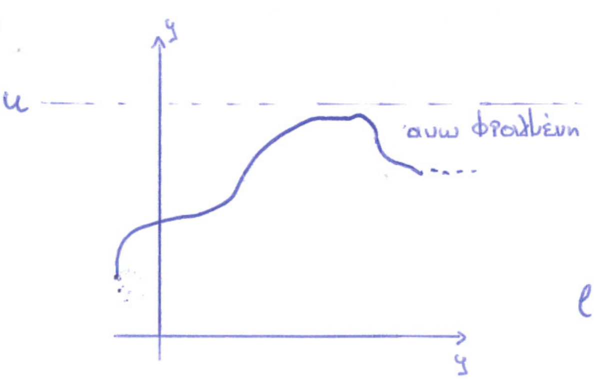
~> $0\le x<1$ τότε $[x]=0$
$1\le x<2$ τότε $[x]=1$
$2\le x<3$ τότε $[x]=2$
$-1\le x<0$ τότε $[x]=-1$

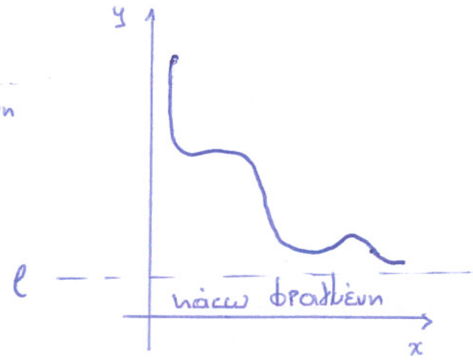


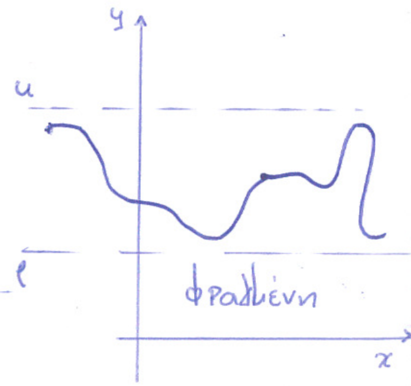
* Μονότονες και φραγμένες συναρτήσεις

• η f είναι αύξουσα ↑ αν $x_1>x_2 \Longrightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$
γν. αύξουσα ↑ αν $x_1>x_2 \Longrightarrow f(x_1)> f(x_2)$
φθίνουσα ↓ αν $x_1>x_2 \Longrightarrow f(x_1)\le f(x_2)$
γν. φθίνουσα ↓ αν $x_1>x_2 \Longrightarrow f(x_1)< f(x_2)$
αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα τότε είναι μονότονη

• η f είναι άνω φραγμένη στο $A\subset\mathbb{R}$ αν: $f(x)\le u$ $\forall x\in A$
κάτω φραγμένη στο $A\subset\mathbb{R}$ αν: $f(x)\ge \ell$ $\forall x\in A$
φραγμένη όταν είναι άνω και κάτω φραγμένη $\ell\le f(x)\le u$ $\forall x\in A$.







*Πρόταση

Η f είναι φραγμένη αν και μόνο αν $|f(x)|<M \iff -M<f(x)<M$ (1) για κάποιο M.

Απόδειξη

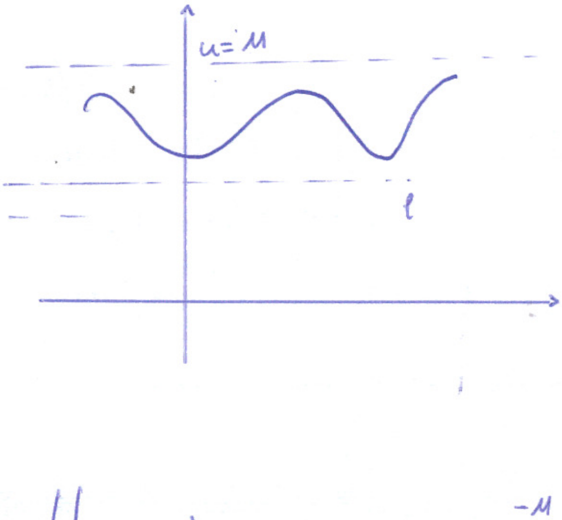
Αν $M=u+1$ και το l τ.ω. $-M=l-1$ τότε ισχύει από τον ορισμό της f φραγμένης. $l-1<l\le f(x)\le u+1$ (2)

Συνεπώς από την (1) πάμε στην (2)

Για να πάμε από την (2) στην (1) διαλέγουμε $M>|u|+1$ και τ.ω. $-M<-|l|-1$. τότε

$-M<-|l|-1\le l-1<l\le f(x)\le u<u+1\le |u|+1<M$

δηλαδή $-M<f(x)<M \iff |f(x)|<M$



• η f είναι άρτια όταν $f(x)=f(-x)$

παράδειγμα

$y=x^2$

$y=\cos x$

$f(x)=(x^2-x)^2\neq f(-x)=(x^2+x)^2$ δεν είναι άρτια

⇝ τα γραφήματα των άρτιων συναρτήσεων είναι συμμετρικά ως προς άξονα y.

• η f είναι περιττή όταν $f(x)=-f(x)$

παράδειγμα

$f(x)=x$

$f(x)=x^3$

$f(x)=\sin x$

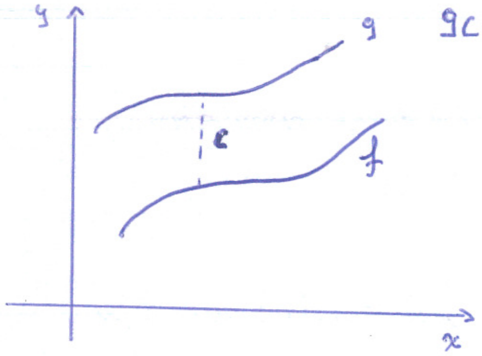
⇝ τα γραφήματα των ... συναρτήσεων είναι συμμετρικά ως προς το $O(0,0)$

Το συμμετρικό του $(x,f(x))$ είναι το $(-x,-f(x))=(-x,f(-x))$

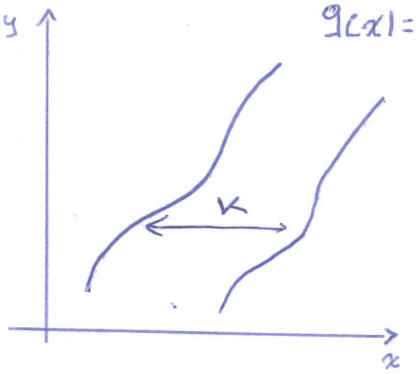
f περιττή ↲ αναπαριστά σημείο του γραφήματος της f που αντιστοιχεί στο $-x$.

* Άλλες ιδιότητες γραφημάτων

κατακόρυφη μετατόπιση. $g(x)=f(x)+c$



οριζόντια μετατόπιση $g(x)=f(x-k)$



* Αντίστροφες Συναρτήσεις

Ορισμός: i) $f:A\to B$ είναι 1-1 αν $\forall x_1,x_2\in A: f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$

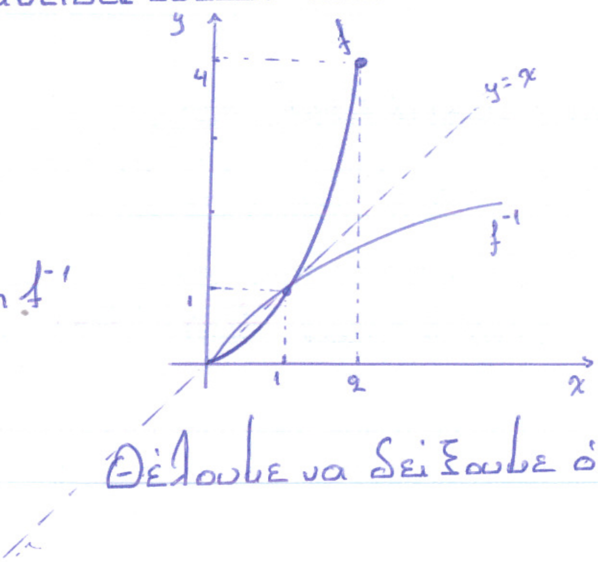
ii) f είναι επί του B αν $f(A)$ δηλ. $\forall y\in B\ \exists x\in A$ τ.ω $f(x)=y$

Αν $f:A\to B$ είναι 1-1 και επί τότε μπορούμε να ορίσουμε $x=f^{-1}(y)$, $f^{-1}:B\to A$

. Αν f γνήσια μονότονη τότε αντιστρέφεται εκεί που είναι επί

παραδείγματα

$f(x)=x^2,\ x>0$ $\quad f^{-1}\ \mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$



~> Αν η f γν. αύξουσα τότε και η f^{-1} γν. αύξουσα (ίδια μονοτονία)

Απόδειξη

Έστω $x=f^{-1}(y)$ η αντίστροφη

Έστω $y_1<y_2$ και $y_1=f(x_1)$
$y_2=f(x_2)$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$

Υπάρχουν 3 περιπτώσεις

i) $f(y_1)>f(y_2) \Longrightarrow x_1>x_2 \Longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άτοπο

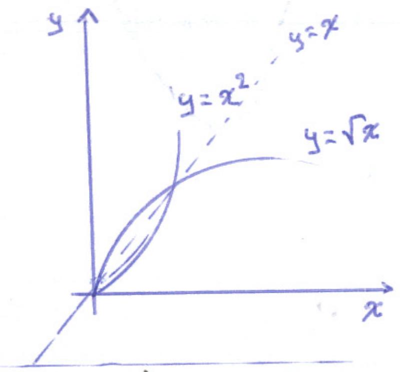
ii) $f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y_2) \Longrightarrow x_1=x_2 \Longrightarrow y_1=y_2$ άτοπο

iii) $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$ υποχρεωτικά ισχύει άρα f^{-1} αύξουσα.

Είδαμε ότι: Αν $f \uparrow$ τότε και $f^{-1} \uparrow$

* <u>παράδειγμα</u>

$y=x^2$ $x>0$



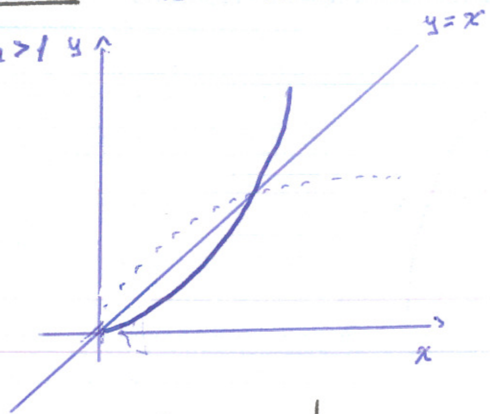
* <u>Πολυωνυμικές Συναρτήσεις</u>: $f(x)=a_n x^n+\dots+a_1 x+a_0$

* <u>Ρητές Συναρτήσεις</u>: πηλίκο πολυωνύμων $\frac{P(x)}{Q(x)}$ P, Q πολυώνυμα

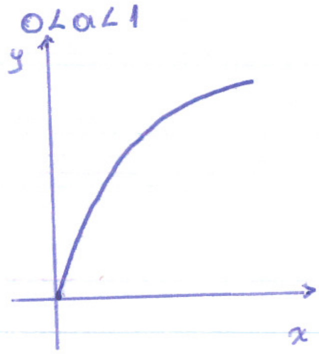
* <u>Αλγεβρικές Συναρτήσεις</u>: π.χ. $y=\sqrt[n]{x}$, $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^3+1}}$

* <u>Δυνάμεις</u>: x^a $x>0$

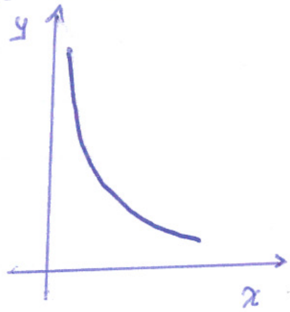
αν $a>1$



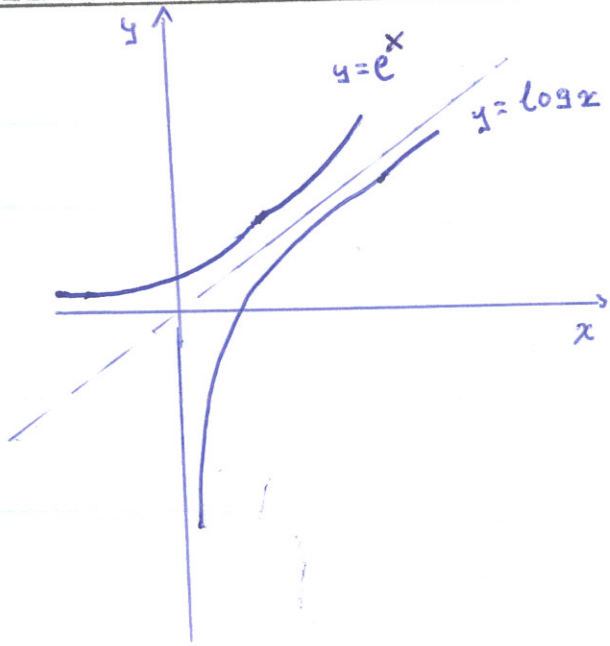
αν $0<a<1$



αν $a<0$

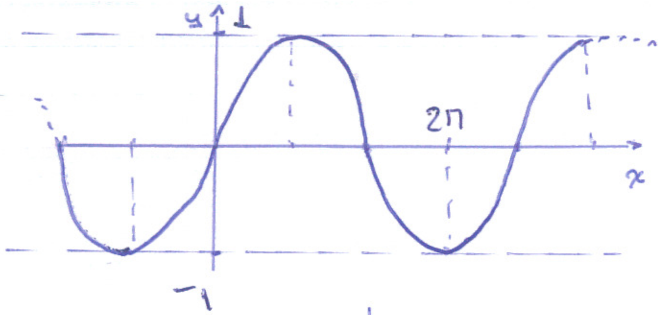


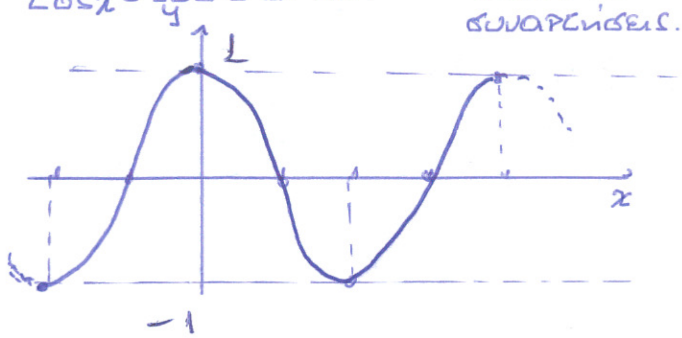
* <u>Εκθετική - λογαριθμική συνάρτηση</u>

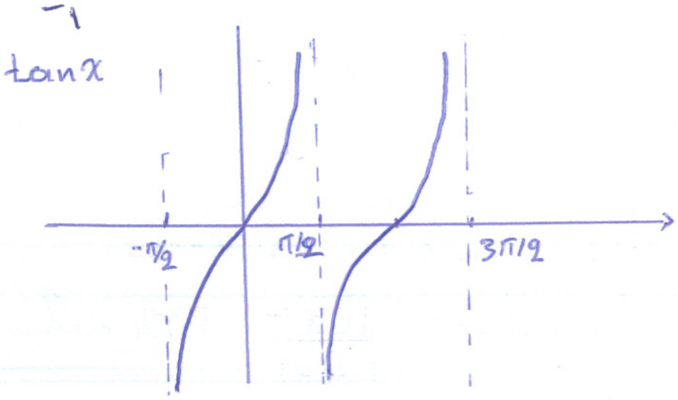


* Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

$\sin x = \sin(x + 2\pi)$ $\qquad$ $\cos x = \cos(x+2\pi)$ ~ περιοδικές συναρτήσεις.

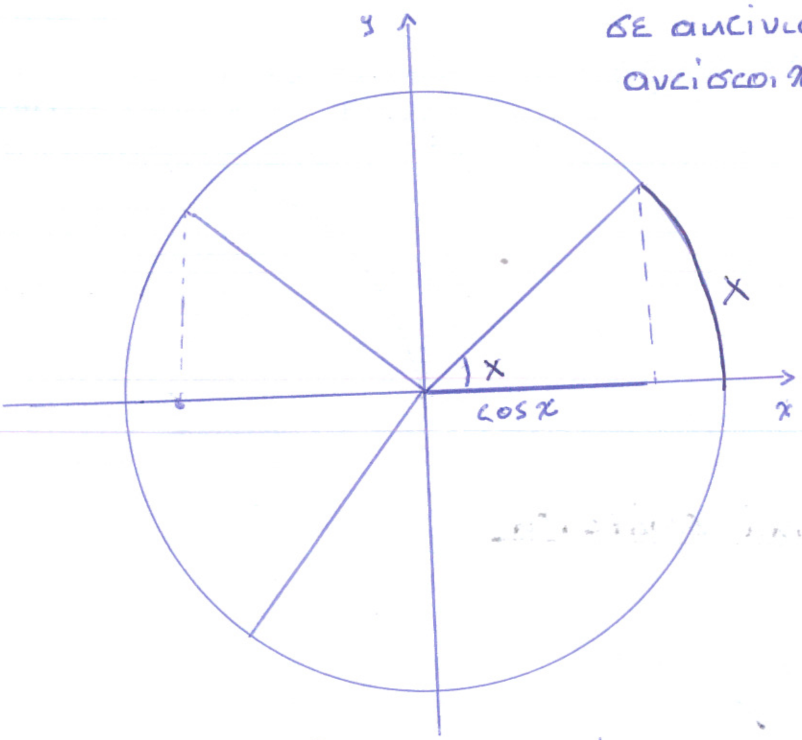






* Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

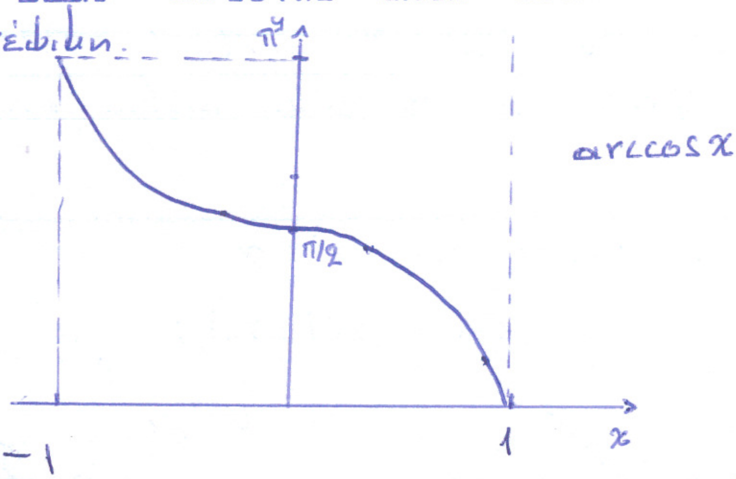
Στο μοναδιαίο κύκλο η γωνία x σε ακτίνια = με το μήκος του αντίστοιχου τόξου



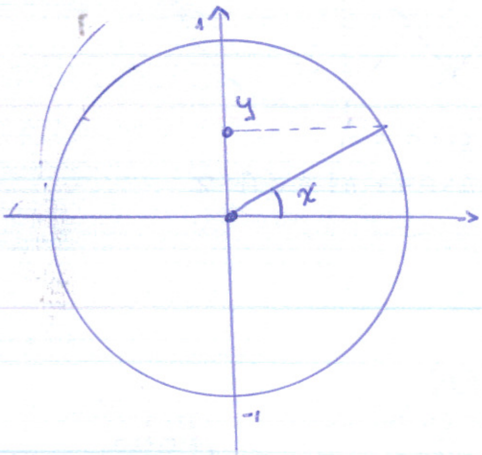
arccos y η γωνία στο $[0,\pi]$ που έχει cosine = y

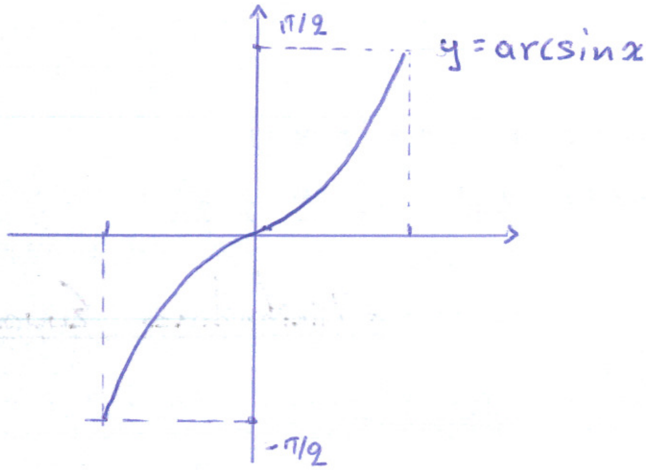
$\arccos: [-1,1] \to [0,\pi]$

Το $\cos x$ όταν $x \in [0, \pi]$ είναι γνησίως μονότονη τότε είναι αντιστρέψιμη.

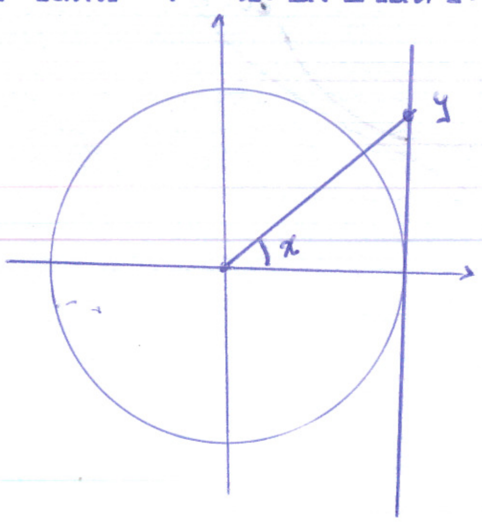


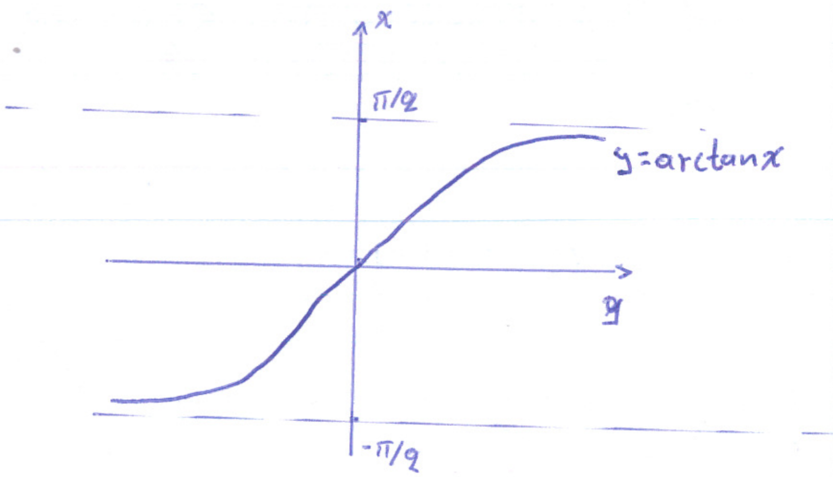
- $y = \sin x$, $x = \arcsin y$ $\quad \arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$





- $y = \tan x$, $x = \arctan y$. $\quad \arctan y : (-\infty, +\infty) \to (-\pi/2, \pi/2)$



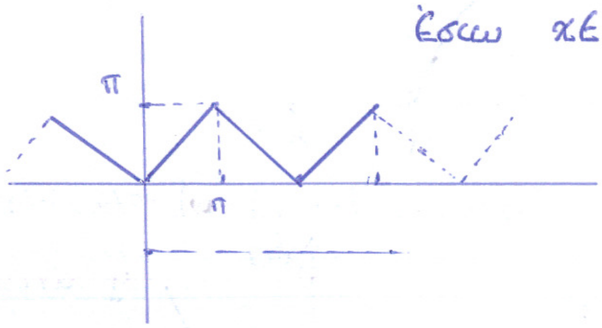


Άσκηση

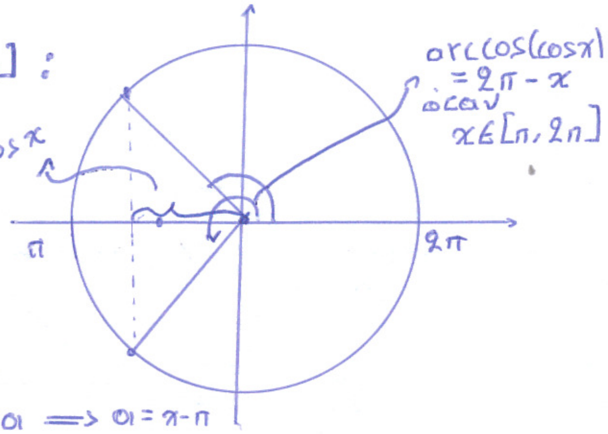
Σχεδιάστε το γράφημα της $y=\arccos(\cos x)$ $x\in\mathbb{R}$

Επειδή $\cos x\in[-1,1]$ $\forall x\in\mathbb{R}$ η y είναι καλώς ορισμένη για όλα τα $x\in\mathbb{R}$.

Έστω $x\in[0,\pi]$ τότε $y=\arccos(\cos x)=x$



Έστω $x\in[\pi,2\pi]$:



τότε $y=2\pi-x$, $x\in[\pi,2\pi]$

~ όταν $x\in[2\pi,3\pi]$ τότε $y=x-2\pi$

$x=\pi+\alpha \Longrightarrow \alpha=x-\pi$

$z=\pi-\alpha \Longrightarrow z=\pi-(x-\pi)=2\pi-x$

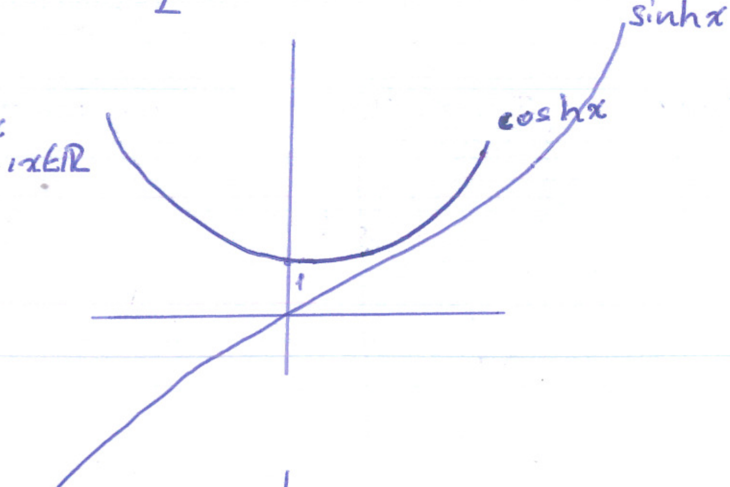
* Υπερβολικές Συναρτήσεις

- υπερβολικό συνημίτονο $\cosh x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$

  άρτια $(\cosh(-x)=\cosh x)$

- υπερβολικό ημίτονο $\sinh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$

  περιττή



Ισχύει:

$(\cosh x)^2-(\sinh x)^2=1$

περιορίζουμε στο $x\in[0,+\infty)$ για να αντιστρέφουμε

- $\cosh x=y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

εάν $e^{x}=t$, $y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)=\dfrac{t^2+1}{2t} \Longleftrightarrow t^2-2yt+1=0$ $\quad\Delta=4y^2-4=4(y^2-1)$

Θέλουμε $y\geq 1$

(για $y<1$ δεν αντιστρέφεται, όπως φαίνεται από το γράφημα)

$t=\dfrac{2y\pm\sqrt{4(y^2-1)}}{2}=y\pm\sqrt{y^2-1}$

Όμως $x\geq 0$ άρα $t=e^{x}\geq 1$

Όμως το γινόμενο των ριζών είναι $=1$ Άρα μόνο μία (η μεγαλύτερη) είναι ≥ 1 συνεπώς $t=y+\sqrt{y^2-1}$

$\Longrightarrow x=\ln t=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$ $\quad y\geq 1$. ~ $\operatorname{arccosh} y$.

παρόμοια $\operatorname{arcsinh} y=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$