*Όρια Συναρτήσεων

Θέλουμε να ορίσουμε $\lim_{x \to \xi} f(x)$

<u>Ερώτημα</u>: μπορεί το x να πλησιάσει το ξ;

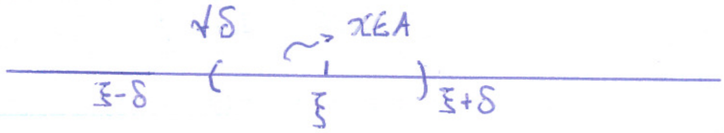
~ Ναι αν το σημείο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A

Αν $f: A \to \mathbb{R}$

*<u>Ορισμός</u>:

Το ξ είναι σημείο συσσώρευσης (σ.σ) του A αν:

$\forall \delta > 0$, $\exists x \in A$ τ.ω $0 < |x - \xi| < \delta$. ~ Πιθανόν $\xi \notin A$



*<u>Παράδειγμα</u>

~ $f: A \to \mathbb{R}$

i) Έστω $A = [0,1] \cup \{2\}$, $f(x) = x^2$

όλα τα σημεία του $[0,1]$ είναι σ.σ. Το 2 δεν είναι σ.σ.

π.χ για $\delta = 1/2$ δεν υπάρχει $x \in A$ τ.ω. $0 < |x-2| < 1/2$

οπότε το $\lim_{x \to 2} f(x)$ δεν έχει νόημα

το $\lim_{x \to 1/2} f(x)$ έχει νόημα

ii) Έστω $A = (0,1)$, $f(x) = \sin x$. Το 0 είναι σ.σ. επομένως το $\lim_{x \to 0} \sin x$ έχει νόημα

~ σ.σ. <u>εξ' αριστερών</u> $\forall \delta > 0$, $\exists x$, $x \in (\xi - \delta, \xi)$

σ.σ. <u>εκ δεξιών</u> $\forall \delta > 0$, $\exists x$, $x \in (\xi, \xi + \delta)$

Το $+\infty$ είναι σ.σ. αν $\forall M > 0$, $\exists x$, $x > M$

Το $-\infty$ είναι σ.σ. αν $\forall M > 0$, $\exists x$, $x < -M$.

* Ορισμός

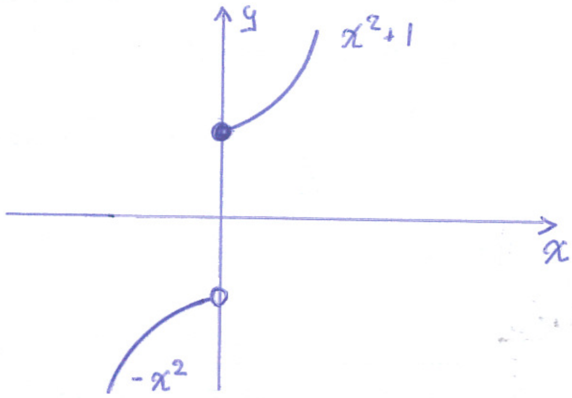
Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και ξ σ.σ. του A, $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τ.ω. $0 < |x-\xi| < \delta \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$

γνήσια πρέπει δηλαδή $x \neq \xi$.

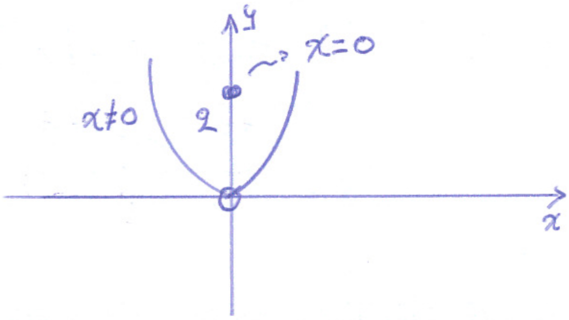
* Παράδειγμα

i) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$



$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$

ii) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$



$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

---

* Πρόταση

Το όριο $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει <u>αν και μόνο αν</u> τα $\lim\limits_{x\to\xi^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to\xi^-} f(x)$ υπάρχουν και είναι ίσα.

* Παραδείγματα

• $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{x}{x} = -1$ όταν $x<0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$ όταν $x>0$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ δεν υπάρχει.

• $\lim\limits_{x\to 0} |x|x = 0$

* Ορισμός

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $+\infty$ σ.σ. του A i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists M>0$ τ.ω $x>M \Longrightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

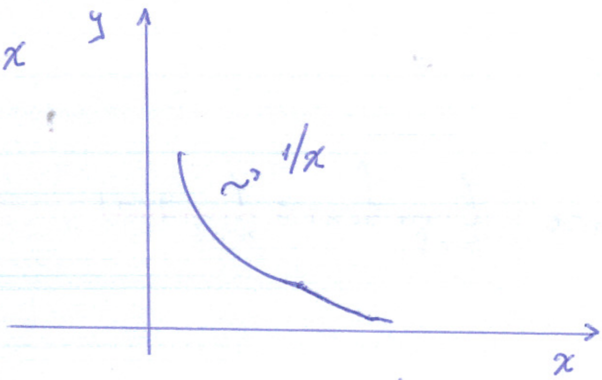
ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ $\forall M>0$, $\exists n>0$ τ.ω όταν $x>n \Longrightarrow f(x)<-M$

~> Οι υπόλοιποι ορισμοί του ορίου θα θεωρηθούν γνωστοί

* Οριζόντια ασύμπτωση της f όταν $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

$x\to-\infty$

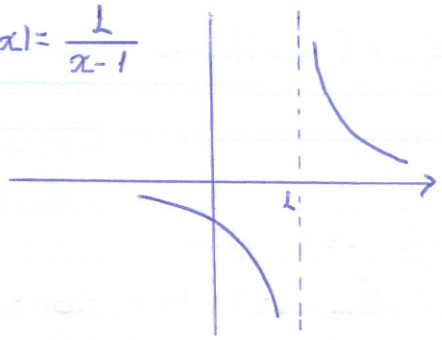
π.χ



οριζόντια ασύμπτωση $y=0$

* Κατακόρυφη ασύμπτωση $\lim_{x\to\xi^-} f(x)=-\infty$

$f(x)=\frac{1}{x-1}$



* Πλάγια ασύμπτωση Η ευθεία $y=\lambda x+\mu$ είναι πλάγια ασύμπτωση της f αν $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x-\mu)=0$ * παράδειγμα: $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $y=x$

* Ορισμός Η f έχει κάποια ιδιότητα (π.χ φραγμένη) κοντά στο ξ (το ξ είναι σ.σ.) αν $\exists\delta>0$ τ.ω. η f έχει την ιδιότητα στο $(\xi-\delta,\xi)\cup(\xi,\xi+\delta)$

* παραδείγματα

i) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ Η f είναι μεγαλύτερη από το $1/2$ για x κοντά στο 0.

ii) η $\frac{1}{x^2}$ είναι φραγμένη κοντά στο $+\infty$

* Κανόνας αντικατάστασης

Έστω $f:A\to B$, $g:B\to\mathbb{R}$. Αν $\lim_{x} f(x)$, $f(x)\neq n$ κοντά στο x και $\lim_{y\to n} g(y)$ υπάρχει τότε $\lim_{x} g(f(x)) = \lim_{y\to n} g(y)$

*Παράδειγμα

• $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x}+2} = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ τότε αν $y=\frac{1}{x}$, $g(y)=\dfrac{y+y^2+1}{y+2}$

Είναι $\lim_{y\to 0} \dfrac{y+y^2+1}{y+2} = \dfrac{1}{2} = \lim_{x\to+\infty} f(x)$

* Εαν $f(x)\geq g(x)$ ($\rightsquigarrow f(x)>g(x)$) κοντά στο $x=\xi$ τότε $\lim_{x\to\xi} f(x)\geq \lim_{x\to\xi} g(x)$ εφ' όσον υπάρχουν

* Κριτήριο παρεμβολής θα θεωρηθεί γνωστό.

*Πρόταση

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, $(x_n)\in A$ με $x_n\to\xi$ αλλά $x_n\neq\xi$ τελικά και $\lim_{x\to\xi} f(x)=\ell$ υπάρχει τότε $f(x_n)\to\ell$

*Παράδειγμα

• $f(x)=(-1)^{[x]}$. Υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} (-1)^{[x]}$. Έστω $x_n=n\to+\infty$ τότε $f(x_n)=(-1)^n$ $[x_n]=[n]=n$

Αν υπήρχε το όριο $\lim_{x\to+\infty} (-1)^{[x]}$ τότε θα έπρεπε (απο προηγούμενη πρόταση)

$$\left.\begin{aligned} f(x_{2n}) &= (-1)^{[2n]} = (-1)^{2n} = 1 \\ f(x_{2n+1}) &= (-1)^{[2n+1]} = (-1)^{2n+1} = -1 \end{aligned}\right\}$$

$f(x_{2n})=f(x_{2n+1})=\ell$ όμως δεν είναι ίσα

*Παραδείγματα (όρια που θα θεωρούνται γνωστά)

i) $\lim_{x \to 2}(5x^3+4x+1) = 5 \cdot 8 + 4 \cdot 2 + 1$

ii) $\lim_{x \to \infty}(5x^3+4x+1) = +\infty$

Ρητές συναρτήσεις

iii) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{x^3+2} = \frac{2}{3}$ iv) $\frac{x^2+1}{x^3+2} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x^3}\right)} = \frac{1}{x} \quad \frac{1+\frac{1}{x} \to 0}{1+\frac{2}{x} \to 0} \xrightarrow{x \to \infty} 0$

Άρα $\lim \frac{x^2+1}{x^3+2} = 0$

Επίσης θεωρούνται γνωστά $x^a \to +\infty$, $a>0$

$\to 0$, $a<0$

e^x, $\ln x$ γνωστές και οι συμπεριφορές τους.

δηλ. τα όρια όταν $x \to \pm\infty$ (για e^x)

• $\lim \frac{x^a}{e^x} = 0$, $a>0$ • $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} \to 0$, $a>0$, $b>0$

---

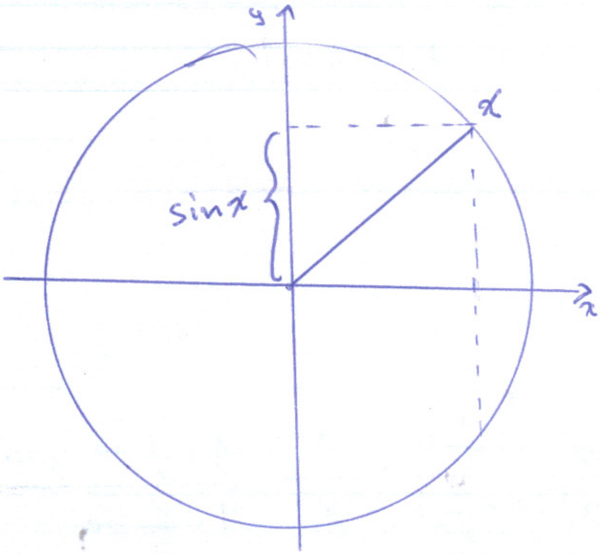
*Πρόταση $\lim_{x \to \xi} \cos x = \cos \xi$

*Απόδειξη

Από τριγωνομετρική ταυτότητα: $\cos x - \cos\xi = -2\sin\frac{x-\xi}{2}\sin\frac{x+\xi}{2}$

$\Longrightarrow |\cos x - \cos \xi| = 2\left|\sin\frac{x-\xi}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x+\xi}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-\xi}{2}\right|$ (1)

* Λήμμα $|\sin x| \le |x|$



Αν $|x| < \frac{\pi}{2}$ βλέπε σχήμα.

Αν $|x| \ge \frac{\pi}{2}$ προφανές.

$$(1) \Longrightarrow 2\left|\sin\frac{x-\xi}{2}\right| \le 2\,\frac{|x-\xi|}{2} = |x-\xi|$$

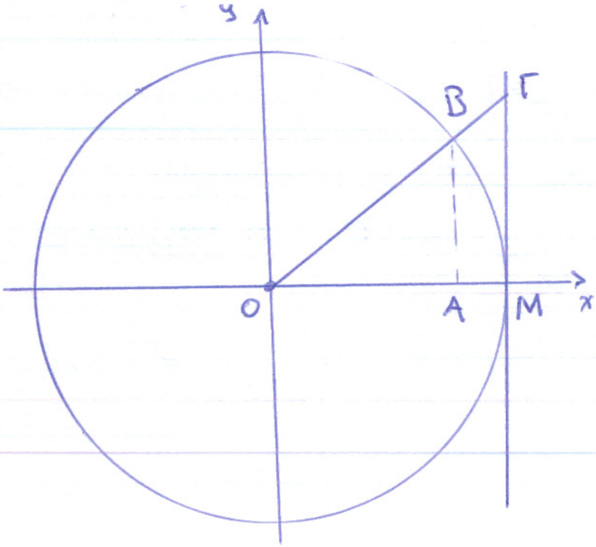
Άρα $\underset{\downarrow \atop 0}{0} \le |\cos x - \cos\xi| \le \underset{\downarrow x\to\xi \atop 0}{|x-\xi|}$ Από κριτήριο παρεμβολής $|\cos x - \cos\xi| \to 0$ ☒

* όταν το τόξο είναι 2π παίρνουμε π
όταν x παίρνουμε $\frac{x}{2}$

* $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$

* Απόδειξη

Έστω $x>0$ και $x<0$ εργαζόμαστε ανάλογα



$$\varepsilon\mu\beta(O\overset{\triangle}{B}A) \le \varepsilon\mu\beta(O\overset{\triangle}{B}M) \le \varepsilon\mu\beta(O\overset{\triangle}{\Gamma}M)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sin x\cdot\cos x \le \frac{x}{2}^{*} \le \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\underset{x\to 0 \downarrow \atop 1}{\cos x} \le \frac{x}{\sin x} \le \underset{\downarrow x\to 0 \atop 1}{\frac{1}{\cos x}}$$

$\xrightarrow[\text{παρεμβολής}]{\text{κριτήριο}}$ $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$ ☒

---

* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$

* Απόδειξη

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)\,x^2} = \underset{\downarrow \atop 1}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}\cdot\underset{\downarrow \atop 1}{\frac{1}{1+\cos x}} \longrightarrow 1/2$$

* <u>Θεώρημα</u>

· Αν η f είναι αύξουσα το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει (πιθανόν $=\infty$)

· Αν επί πλέον η f είναι άνω φραγμένη τότε το όριο είναι πραγματικός αριθμός.

Συνέχεια

* <u>Ορισμός</u>

Η f είναι συνεχής στο ξ αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$

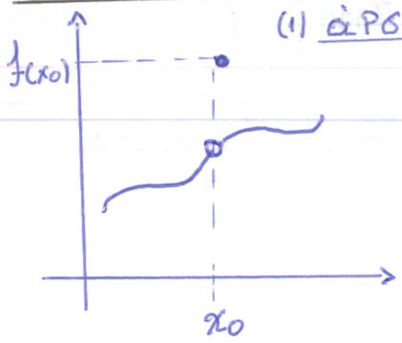
ή αν το ξ είναι μεμονωμένο σημείο π.χ $A=[0,1]\cup\{2\}$ στο σημείο 2 στο A είναι συνεχής

(~> Αν $f: A\to\mathbb{R}$ υποχρεωτικά $\xi\in A$)

* <u>Αυστηρός Ορισμός</u> (ισοδύναμα)

Αν $f: A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in A$, η f συνεχής στο ξ αν $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ τ.ω $|x-\xi|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$.

~> <u>Είδη ασυνεχειών</u>



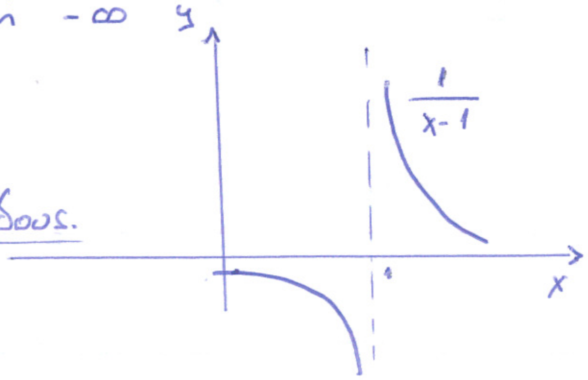
(1) <u>άρσιμη ασυνέχεια</u> (δηλ. μπορώ αλλάζοντας τη συνάρτηση ώστε να γίνει συνεχής.

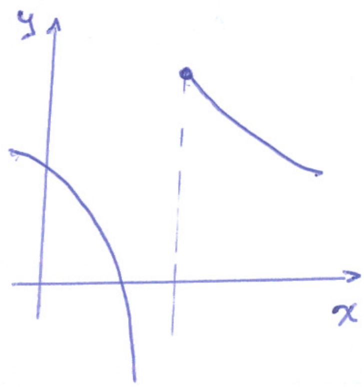
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$

Αν ορίσω $f(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

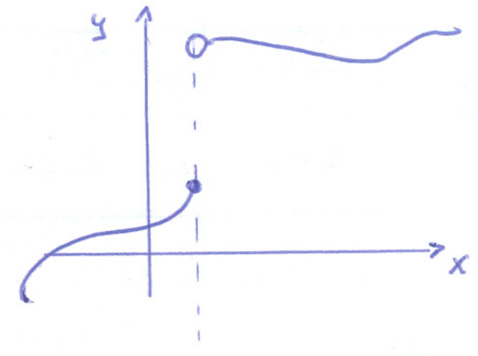
(2) i) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$
$x\to x_0^+$ ή $x\to x_0^-$

<u>Ασυνέχεια πρώτου είδους.</u>





ii) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ υπάρχουν και τα δύο αλλά όχι ίσα



(3) Ασυνέχεια β' είδους ή ουσιώδης ασυνέχεια

~ Το αριστερό ή δεξιό όριο δεν υπάρχει.

π.χ.

$$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

*<u>Άσκηση</u> Δείξτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει

Αρκεί να βρώ 2 ακολουθίες $x_n\to 0$, $y_n\to 0$ τ.ω

$\lim f(x_n)\neq \lim f(y_n)$

- $\sin\frac{1}{x}=1$ διαλέγω $x_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}\longrightarrow 0$

  $\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $\quad f(x_n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=1$

- $\sin\frac{1}{x}=0 \iff \frac{1}{x}=n\pi$, διαλέγω $y_n=\dfrac{1}{n\pi}\longrightarrow 0$

$f(y_n)=\sin(n\pi)=0 \longrightarrow 0\neq 1=\lim f(x_n)$

Άρα το $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.