Δευτέρα 4 Νοεμβρίου 2019

* **Πρόταση:** (Συνεχείς συναρτήσεις και ακολουθίες)

Αν $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής, $\xi \in A$:

Αν $(x_n) \in A$, $x_n \to \xi$ τότε $f(x_n) \to f(\xi)$

* **Παράδειγμα**

$$a_n = \sin\left(\frac{1+(-1)^n}{n}\right)$$

. Έχουμε $f(x) = \sin x$, συνεχής. η $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n} \longrightarrow 0 = \xi$

Άρα η $a_n = f(x_n) \longrightarrow f(\xi) = f(0) = 0$

* Τα 3 Βασικά Θεωρήματα Συνεχών συναρτήσεων

* **Θεώρημα φραγμένης συνάρτησης**

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ κλειστό και φραγμένο, συνεχής

τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$.

* **Παράδειγμα**

• $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{10}, 5\right]$, $\frac{1}{5} \leq f(x) \leq 10$

$x \in \left(\frac{1}{10}, 5\right)$ $\quad \frac{1}{5} < f(x) < 10$

$x \in (0, 5)$ $\quad f$ όχι φραγμένη κοντά στο 0

* **Θεώρημα Μέγιστης και ελάχιστης Τιμής**

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχής

τότε υπάρχουν $\zeta, n \in [a,b]$ τ.ω. $f(\zeta) \leq f(x) \leq f(n)$

$\forall x \in [a,b]$

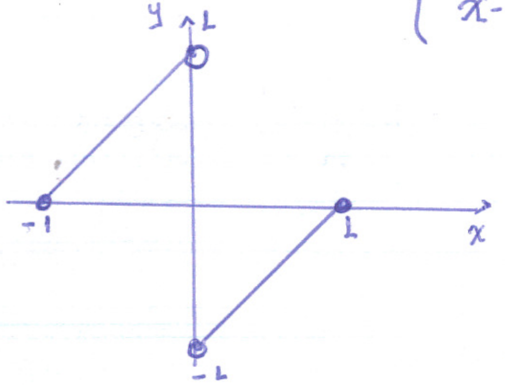
Δηλαδή η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

*Παραδείγματα

• $y = x^2+1$, $x\in[1,5]$ $\quad y(1)=2\le x^2+1\le y(5)=26$

$x\in(1,5)$ $\quad 2<x^2+1<26$, φραγμένη όμως δεν λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

• $y = f(x) = \begin{cases} x+1 , & -1\le x<0 \\ 0 , & x=0 \\ x-1 & 1\ge x>0 \end{cases}$ $\quad x\in[-1,1]$

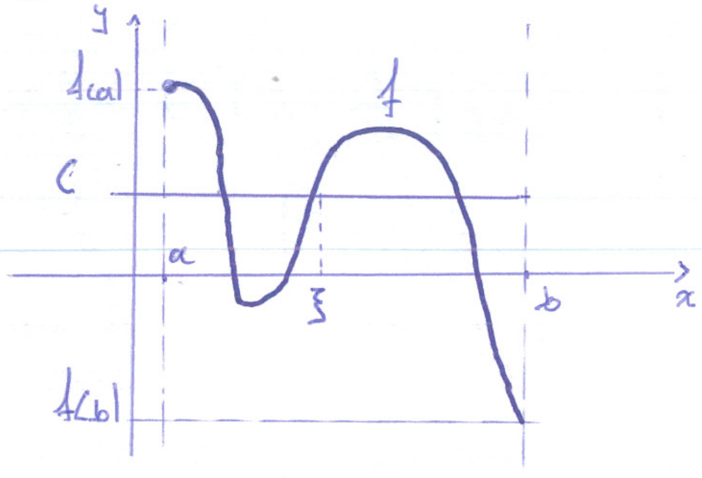


$-1<f(x)<1$ είναι φραγμένη αλλά δεν υπάρχει σημείο που να υλοποιεί το $+1$ ή -1

* Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής

$\forall c$ ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(b)$ $\exists \xi\in[a,b]$ τ.ω $f(\xi)=c$.



*Παράδειγμα

Η εξίσωση $\cos x = x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $x\in[0,\pi/2]$.

Έστω $f(x)=x-\cos x$ $\quad x\in[0,\pi/2]$

$f(0)=-1$ $\quad 0\in[-1,\pi/2]$ άρα $\exists \xi$ τ.ω $f(\xi)=0$

$f(\pi/2)=\pi/2$

Άσκηση

Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$

Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη

Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$ άρα (για $\varepsilon=1$) έχω ότι $\exists M_1>0$ τ.ω για $x>M_1$ $|f(x)-5|<1$ δηλαδή
$4<f(x)<6$

Αφού $\lim_{x\to-\infty}=5$ με τον ίδιο τρόπο έχω ότι $\exists M_2<0$ τ.ω για $x<M_2$, $4<f(x)<6$.

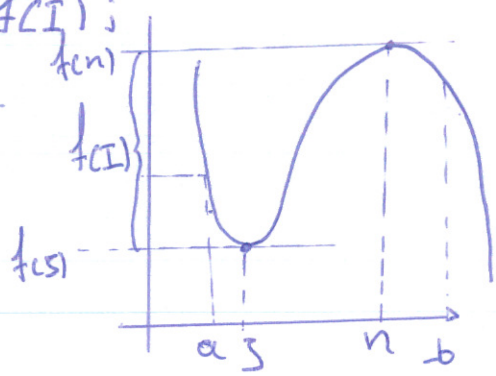
Στο διάστημα $[M_2,M_1]$ (=κλειστό και φραγμένο) η f είναι φραγμένη δηλ. $|f|<K$, $x\in[M_2,M_1]$

Άρα $|f|<\max(K,6)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις-εφαρμογές.

- $I=[a,b]$, f συνεχής Τι είναι το $f(I)$;

  Το $f(I)$ είναι κλειστό διάστημα.



Απόδειξη

Αφού f συνεχής στο $[a,b]$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Δηλ. $\exists \xi,\eta\in[a,b]$ τ.ω
$f(\xi)\le f(x)\le f(\eta)$ $\forall x\in I$

Άρα $f(I)\subseteq[f(\xi),f(\eta)]$ Για να δείξω ότι $[f(\xi),f(\eta)]\subset f(I)$ χρησιμοποιώ το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

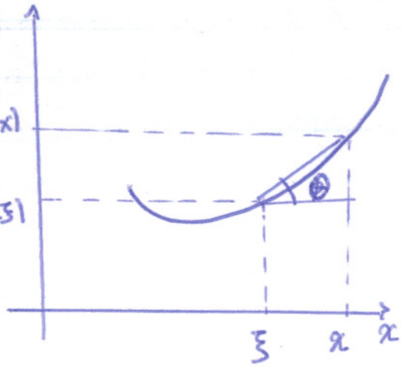
Αν $\forall c\in[f(\xi),f(\eta)]$ τότε $\exists x\in I$ τ.ω $f(x)=c$

συνεπώς $[f(\xi),f(\eta)]\subset f(I)$

Άρα τελικά $[f(\xi),f(\eta)]=f(I)$.

- Γενικά αν I διάστημα και f συνεχής $\Longrightarrow$ $f(I)$ διάστημα

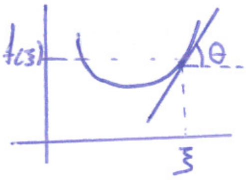
* Παράγωγος Συνάρτησης



$$\varepsilon\varphi\Theta_x = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\in\mathbb{R}$ τότε το συμβολίζουμε με $f'(\xi)$ και είναι η παράγωγος της f στο σημείο ξ.

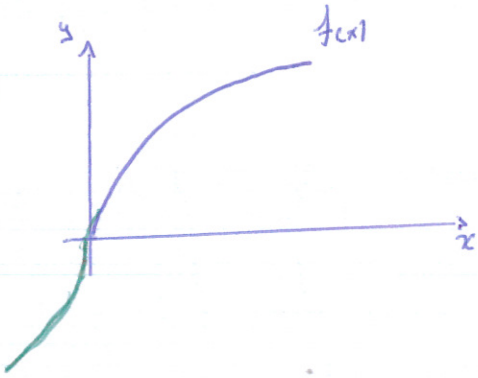
η κλίση της εφαπτομένης στο $(\xi, f(\xi))$ είναι $f'(\xi)$ δηλ. η ευθεία:



$$\varepsilon\varphi\Theta_x \xrightarrow[x\to\xi]{} f'(\xi)$$

* παραδείγματα

• $f(x)=\sqrt{x}\,,\ x>0$



ο άξονας y εφάπτεται στο γράφημα στο σημείο $(0,0)$.

* $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\,, & x>0\\ -\sqrt{-x}\,, & x<0\end{cases}$

• $f(x)=\begin{cases}x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\,, & x\neq 0\\ 0\,, & x=0\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$;

$(\xi=0)$ $\quad \frac{f(x)-\overbrace{f(0)}^{=0}}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=x\cdot\sin\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$ Συνεπώς $f'(0)=0$

---

* Αν μια f είναι παραγωγίσιμη στο $x=\xi$ τότε είναι συνεχής στο $x=\xi$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα

Απόδειξη

Για $x\neq\xi$ $\quad f(x)-f(\xi)=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}(x-\xi)$

Άρα $\lim\limits_{x\to\xi}(f(x)-f(\xi))=f'(\xi)\cdot 0=0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$

~> Έστω η συνεχής συνάρτηση $g(x)=|x|$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{x}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=1\neq -1$$

Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη

Οι κανόνες παραγώγισης (κανόνας αθροίσματος, γινομένου πηλίκου κτλ) θεωρούνται γνωστοί

*Κανόνας αλυσίδας : $f: A\to B$, $g: B\to \mathbb{R}$, ξ σ.σ του A και $\eta=f(\xi)$ είναι σ.σ. του B.

Αν f, g παραγωγίσιμες στο ξ και η αντίστοιχα ώστε

$$(g\circ f)'=(g(f(x)))'=g'(\eta)\cdot f'(\xi)=g'(f(\xi))\cdot f'(\xi)$$

~ Απόδειξη

Έχουμε $\dfrac{g(f(x))-g(f(\xi))}{x-\xi}=\dfrac{g(f(x))-g(f(\xi))}{(*)\, f(x)-f(\xi)}\,\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$

Για $x\to\xi$ θα μπορούσε να έχω $f(x)=f(\xi)$ και συνεπώς να μηδενίζεται ο παρανομαστής (*)

Για να ξεπεράσω αυτό το πρόβλημα ορίζω την βοηθητική συνάρτηση

$$G(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}, & y\in B,\ y\neq\eta\\[2mm] g'(\eta), & y=\eta\end{cases}$$

Η G είναι συνεχής στο η και $g(y)-g(\eta)=G(y)(y-\eta)$ $\forall y\in B$.

οπότε γράφω $\dfrac{g(f(x))-g(f(\xi))}{x-\xi}=G(f(x))\,\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$

$$\xrightarrow[x\to\xi]{}\ G(f(\xi))\cdot f'(\xi)=g'(f(\xi))\cdot f'(\xi)$$

Συμβολισμός $y = y(x)$, $z = z(y)$ $\qquad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

---

* **Κανόνας αντίστροφης συνάρτησης** $f: I \to \mathbb{R}$. γνήσια αύξουσα και $\xi \in I$. Αν f παραγωγίσιμη στο ξ τότε η f^{-1} έχει παράγωγο στο $\eta = f(\xi)$ και

$$(f^{-1}(\eta))' = \begin{cases} 1/f'(\xi) & , \text{ αν } f'(\xi) \text{ αριθμός} \\ 0 & , \text{ αν } f'(\xi) = +\infty \\ +\infty & , f'(\xi) = 0 \end{cases}$$

ανάλογα για γν. φθίνουσα.

*παραδείγματα

- $y = f(x) = x^n$, $x = f^{-1}(y) = y^{1/n}$

$f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$,

$$\frac{d(y^{1/n})}{dy} = \frac{1}{\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=y^{1/n}}} = \frac{1}{(n x^{n-1})_{x=y^{1/n}}} = \frac{1}{n \cdot y^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot y^{1/n - 1}$$

- $y = \sin x$ $\uparrow$ στο $[-\pi/2, \pi/2]$ με τιμή στο $[-1, 1]$

Θέλω να βρω $\dfrac{d}{dy}(\arcsin y)$

Έχουμε $\dfrac{d(\sin x)}{dx} = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ αφού $\cos x \geq 0 \ \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$

οπότε $\dfrac{d(\arcsin y)}{dy} = \dfrac{1}{\left.\dfrac{d(\sin x)}{dx}\right|_{x=\arcsin y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$

$\rightsquigarrow$ Συμβολισμός
$\boxed{f'(x)|_{x=s} = f'(s)}$

• $y = \tan x$ $y: (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow (-\infty, \infty)$

$x = \arctan y$ $x: (-\infty, \infty) \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$

Θέλω να βρώ $\dfrac{d(\arctan y)}{dy}$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d(\tan x)}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$= \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ οπότε $\dfrac{d(\arctan y)}{dy} = \dfrac{1}{\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = \arctan x}}$

$= \left.\dfrac{1}{1 + \tan^2 x}\right|_{x = \arctan y} = \dfrac{1}{1 + y^2}$

$$\boxed{* \ \frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

Άλλες γνωστές παράγωγοι

• $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$, • $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$

• $\dfrac{d(\log_a x)}{dx} = \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{x}$ $x > 0$, $1 \neq a > 0$