* 4 Σημαντικά Θεωρήματα

*** Ορισμός.** $f: A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$

i) ξ σημείο ολικού μεγίστου αν $f(x) \leq f(\xi)$ $\forall x \in A$

ii) ξ σημείο τοπικού μεγίστου αν $\exists \delta > 0$ τ.ω

$$f(x) \leq f(\xi) \quad \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap A$$

Αντίστοιχα για ελάχιστο

Ακρότατα σημεία είναι όταν μια συνάρτηση έχει ελάχιστο ή μέγιστο.

*** Θεώρημα 1** (Θ. Fermat) $f: A \to \mathbb{R}$, και ξ σημείο συσ. του A

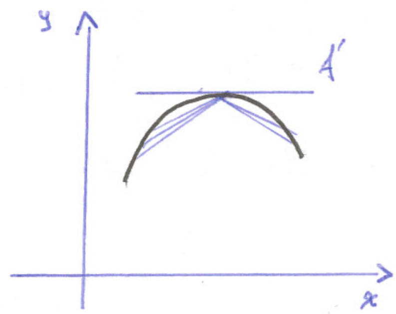
Αν ξ σημείο τοπικού ακροτάτου τότε. είτε η $f'(\xi)$ δεν υπάρχει είτε υπάρχει και $f'(\xi) = 0$

Απόδειξη:

Έστω ότι η $f'(\xi)$ υπάρχει άρα υπάρχει και ξ σημείο μεγίστου, το όριο $\lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0$ όμως $f(x) \leq f(\xi)$ διότι ξ σημείο τοπικού μεγίστου και $x > \xi$ συνεπώς $f'(\xi) \leq 0$

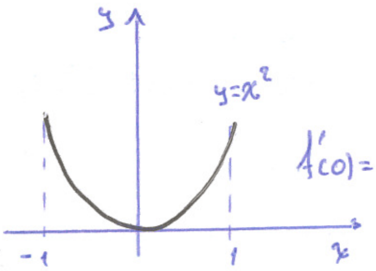
Με το ίδιο επιχείρημα $f'(\xi) = \lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0$

άρα τελικά $f'(\xi) = 0$.



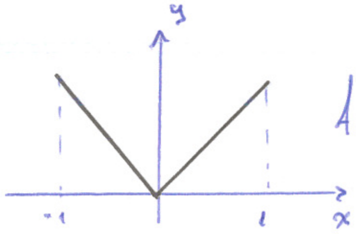
παραδείγματα

• $f(x) = x^2$ $x \in (-1, 1)$



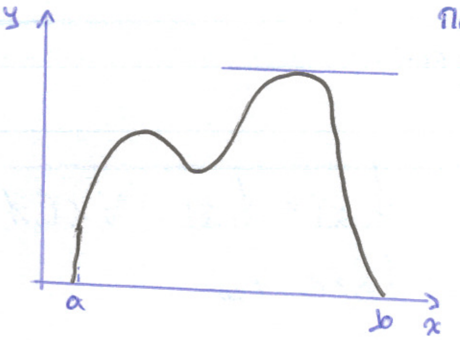
$f'(0) = 0$

• $g(x) = |x|$ $x \in (-1, 1)$



$f'(0)=$ δεν υπάρχει.

* **Θεώρημα 2** (Θ. Rolle) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f(a)=f(b)$ $\Rightarrow \exists\, \xi\in(a,b)$ τ.ω $f'(\xi)=0$.

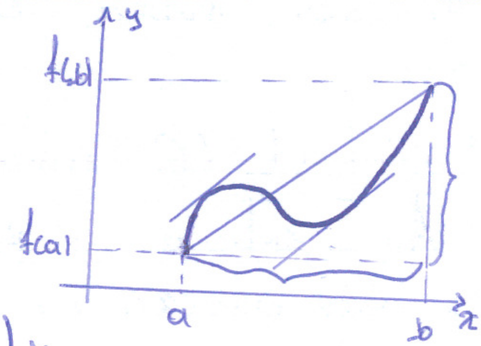


---

* **Θεώρημα 3** (Θεώρημα Μέσης Τιμής, μορφή Lagrange)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμο στο (a,b) τότε $\exists\,\xi\in(a,b)$:

$$(1)\quad f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Απόδειξη

Εφαρμόζω Θ. Rolle

στην $h(x)=(b-a)f(x)-(f(b)-f(a))x$

$h(a)=(b-a)\cdot f(a)-(f(b)-f(a))a = b\,f(a)-a\,f(b)$

$h(b)=b\cdot f(a)-a\cdot f(b)$

Άρα $\exists\,\xi$ τ.ω $h'(\xi)=0 \Longleftrightarrow (1)$

---

* **Θεώρημα 4** (ΘΜΤ, μορφή Cauchy) f,

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο (a,b) τότε $\exists\,\xi\in(a,b)$ τ.ω $(f(b)-f(a))\,g'(\xi)=(g(b)-g(a))\,f'(\xi)$

(για $g(x)=x$ έχω το Θ3)

Απόδειξη

Εφαρμόζω Θ. Rolle στην $h(x)=(f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)$

Εφαρμογή

⇝ Έστω $x \neq x_0$

$\exists\, \xi$ ανάμεσα σε x και x_0

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$ υποθέτω ότι δεν έχω μηδενισμούς παρανομαστών

? Απόδειξη De l'Hospital.

* Παράδειγμα $a>1$, $0<x<y$.

Δείξτε: $a x^{a-1}(y-x) < y^a - x^a < a y^{a-1}(y-x)$ ⇝

Έστω $f(x)=x^a$

$f'(x)=a\cdot x^{a-1}$

⇝ $f(y)-f(x) =$ από Θ.Μ.Τ. $= f'(\xi)(y-x)$, $x<\xi<y$

$= a\,\xi^{a-1}(y-x) < a y^{a-1}(y-x)$

$a x^{a-1}(y-x) <$

*Εφαρμογές

*Πρόταση

I: διάστημα, f παραγωγίσιμη τότε:

i) $f=$ σταθ. $\Longleftrightarrow f'=0$

ii) $f\uparrow(\downarrow) \Longleftrightarrow f'\geq 0\ (\leq 0)$

Απόδειξη (i)

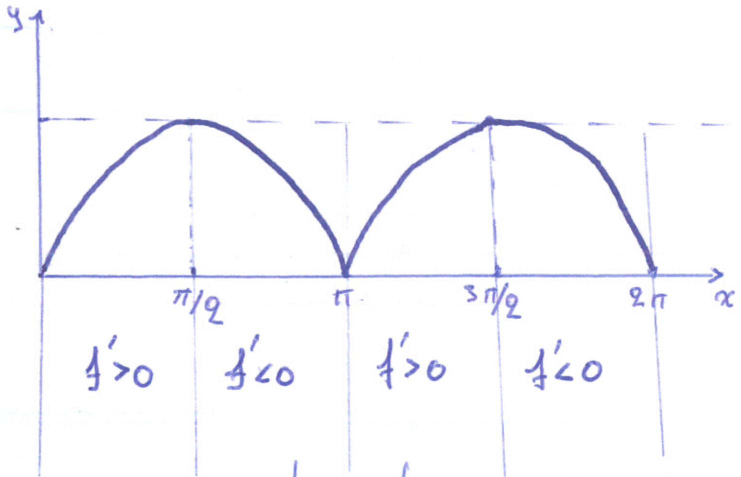
($\Longrightarrow$) Έστω $f=$ σταθ. τότε $\dfrac{\overset{c}{f(x)}-\overset{c}{f(y)}}{x-y}=0 \xrightarrow[y\to x]{} 0=f'(x)$

($\Longleftarrow$) Έστω x,y δύο τυχαία σημεία

$f(y)-f(x)=\underset{0}{f'(\xi)}(y-x)$ για κάποιο ξ μεταξύ των x,y.

Άρα $f(x)=f(y)\ \forall x,y\in I$

* Παράδειγμα Μελετήστε ως προς τα ακρότατα την $f(x)=|\sin x|$, $x\in[0,2\pi]$.



$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leq x\leq\pi\\ -\sin x & \pi\leq x\leq 2\pi\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\leq x<\pi\\ -\cos x & \pi<x\leq 2\pi\end{cases}$$

Για $x=\pi/2$ σημείο μεγίστου (max)

$\pi \longrightarrow$ min, $(f\downarrow, f\uparrow)$ σημείο τ. ελαχίστου.

* Παράδειγμα Απόδειξη ανισοτήτων

$e^x \geq x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Έστω $f(x) = e^x - x - 1$, $f'(x) = e^x - 1$

άρα $f'(x) = \begin{cases} >0 & \text{όταν } x>0 \\ <0 & \text{όταν } x<0 \end{cases}$ άρα η f φθίνει στο $(-\infty, 0]$ και αυξάνει στο $[0, +\infty)$

Συνεπώς $f(x) \geq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff f(x) \geq 0 \Rightarrow e^x \geq x+1$

Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad , \quad x \geq -1, \; n \in \mathbb{N}$$

Παίρνω $f(x) = (1+x)^n - 1 - nx$ $f'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n\left[(1+x)^{n-1} - 1\right]$

$$f'(x) = \begin{cases} >0 & \text{όταν } x>0 \\ <0 & \text{όταν } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

Άρα η $f \downarrow$ στο $[-1, 0]$ και $\uparrow$ στο $[0, +\infty)$ άρα ελάχιστο για $x=0$, $f(x) \geq 0 = f(0)$