Δευτέρα 18 Νοεμβρίου 2019.

* Άσκηση Προόδου

(i) $0 < a_1 < b_1$ $\quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

Να αποδείξουμε ότι $a_n \leq b_n$

Όλοι οι όροι είναι > 0

$a_{n+1} \leq b_{n+1} \iff \sqrt{a_n b_n} \leq \dfrac{a_n + b_n}{2}$

$\iff a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n} \geq 0 \iff (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \geq 0$

(ii) Οι a_n και b_n είναι μονότονη.

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\sqrt{a_n b_n}}{a_n} = \sqrt{\dfrac{b_n}{a_n}} \geq 1$ Άρα $a_{n+1} \geq a_n$ $a_n \uparrow$

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{b_n + a_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} \leq 0 \implies (b_n) \downarrow$

(iii) Δείξτε ότι συγκλίνουν

Η a_n είναι αύξουσα, Θ.δ.ο είναι άνω φραγμένη

Από $a_n \leq b_n \leq b_1$. Επίσης $(b_n) \downarrow$ άρα αρκεί ν.δ.ο. η (b_n) κάτω φραγμένη: όμως $b_n \geq a_n \geq a_1$

Επομένως $a_n \to a$

$b_n \to b$

Έχουμε $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

$\downarrow$

$b = \dfrac{a+b}{2} \implies a = b.$

*Δεύτερη Παράγωγος

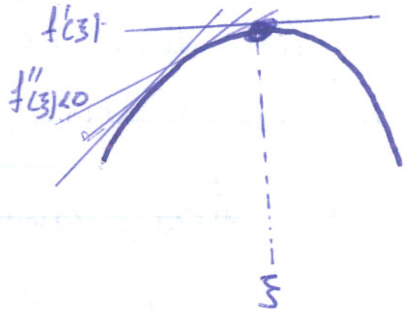
π.χ. $f(x)=x^3+2x^2$, $f'(x)=3x^2+4x$, $f''(x)=6x+4$

* Κριτήριο 2ης παραγώγου

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $\xi\in(a,b)$ και η $f''(\xi)$ υπάρχει και $f'(\xi)=0$.

Τότε αν $f''(\xi)>0$ τότε τοπικό ελάχιστο

αν $f''(\xi)<0$ τότε τοπικό μέγιστο.

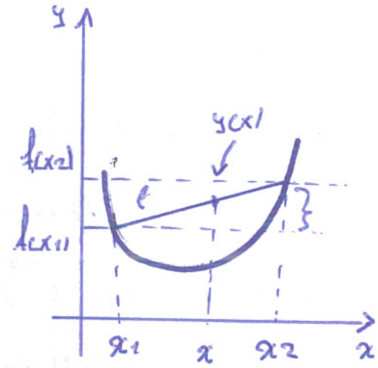


Υπόθεση: f παραγωγίσιμη παντού.

*Ορισμός Κυρτής Συνάρτησης

Η f είναι κυρτή στο I αν $\forall x_1,x_2\in I$

$$f(x)\le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1).$$



Η ℓ περνάει από το C_f και έχει κλίση $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ άρα εξίσωση της ℓ είναι

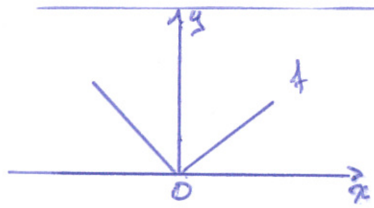
$$y(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1) \iff$$

$x=(1-t)x_1+tx_2$
$0\le t\le 1$

$f((1-t)x_1+tx_2)$
$\le$
$(1-t)f(x_1)+t\,f(x_2)$.

*παράδειγμα

$f(x)=|x|$ είναι κυρτή συνάρτηση



κυρτή συνάρτηση 

Παρόμοια και για κοίλη.

***Πρόταση 1** : $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και παραγωγίσιμη. Τότε.

(i) f κυρτή $\iff$ f' αύξουσα

(ii) f κοίλη $\iff$ f' φθίνουσα.

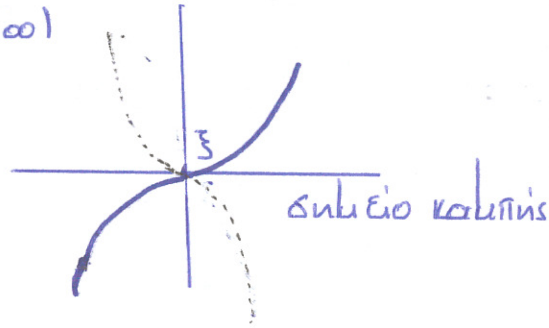
***Πρόταση 2** $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και 2 φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I. Τότε:

(i) f κυρτή $\iff$ $f'' \geq 0$

(ii) f κοίλη $\iff$ $f'' \leq 0$

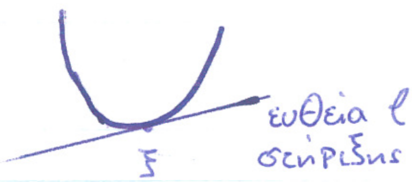
* Σημεία καμπής

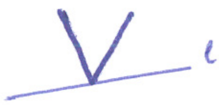
Έστω ξ τ.ω $f'(\xi)$ υπάρχει (η είναι $\pm\infty$) και το γράφημα της f είναι κάτω από την εφαπτομένη στο ξ από τη μια μεριά και πάνω από την άλλη

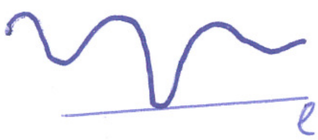


* Ευθεία στήριξης

***Ορισμός** $f: I \to \mathbb{R}$ ξ εσωτερικό σημείο του I. ℓ είναι ευθεία στήριξης από κάτω αν η ℓ διέρχεται από το $(\xi, f(\xi))$ και δεν υπάρχει σημείο του γραφήματος κάτω από την ℓ







* Απόδειξη Ανισοτήτων με κυρτότητα

* Παράδειγμα

$$(1) \quad e^{\frac{x_1+x_1}{2}} \leq \frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2} \quad \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}.$$

- Έστω $e^{\frac{x_1}{2}} = a$, $e^{\frac{x_2}{2}} = b$ τότε

$$(1) \quad a \cdot b \leq \frac{a^2+b^2}{2} \iff (a-b)^2 \geq 0.$$

- Έστω $y = e^x = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, κυρτή άρα $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$

$\forall t \in [0,1]$. $\iff e^{(1-t)x_1+tx_2} \leq (1-t)e^{x_1} + t \cdot e^{x_2}$

Για $t = 1/2$ έχω την (1).

Τετάρτη 20 Νοεμβρίου 2019.

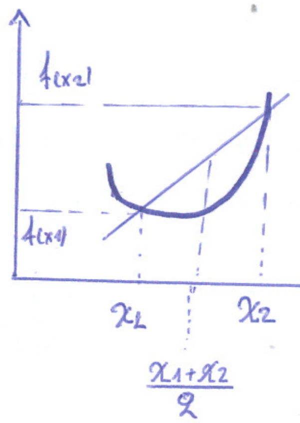
***Παράδειγμα** (Απόδειξη ανισοτήτων λόγω κυρτότητας)

Δείξτε ότι $(x_1+x_2)\ln\frac{x_1+x_2}{2} \le x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2$ $\forall x_1, x_2 > 0$.

- $f(x) = x \cdot \ln x$, $x>0$.

$f'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, Συνεπώς η f είναι κυρτή



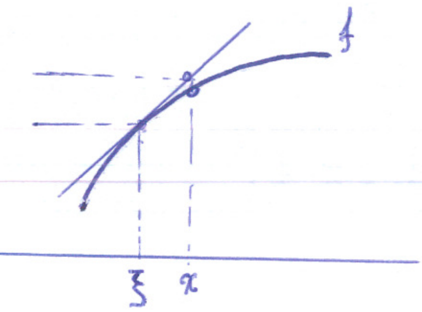
$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

$\Longleftrightarrow \frac{(x_1+x_2)}{2}\cdot\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{x_1\cdot\ln x_1 + x_2\cdot\ln x_2}{2}.$

* Πιο γενικά ισχύει $f((1-t)x_1+tx_2) \le (1-t)f(x_1) + t f(x_2)$
$0 \le t \le 1$

---

*Θεώρημα Taylor.



Όταν x κοντά στο ξ

$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ $\qquad \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = g(x)$

και $g(x) \xrightarrow[x\to\xi]{} f'(\xi)$

λύνοντας ως προς $f(x)$:

$f(x) - f(\xi) = g(x)(x-\xi)$,

$f(x) = f(\xi) + g(x)(x-\xi)$.

Άλλος τρόπος: Χρησιμοποιούμε ΘΜΤ τότε

$f(x) - f(\xi) = f'(p)(x-\xi)$ (p μεταξύ x και ξ)

Οπότε $\boxed{f(x) = f(\xi) + f'(p)(x-\xi)}$ (1)

Με την (1) προσεγγίζουμε την $f(x)$ κοντά στο σημείο $x=\xi$ με μια γραμμική συνάρτηση.

~> Καλύτερη προσέγγιση:

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1}(x-\xi) + \frac{f''(\rho)}{2!}(x-\xi)^2 \quad \rho \text{ μεταξύ } x \text{ και } \xi.$$

η f είναι τριώνυμο (δηλ. βαθμού 2).

* <u>Θεώρημα Taylor.</u>

<u>Θ. Taylor με σφάλμα (η υπόλοιπο) τύπου Lagrange</u>

Έστω $n \in \mathbb{N}$, διάστημα I, $f: I \to \mathbb{R}$, $\xi \in I$ και f έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι τάξης n και $\exists$ η $f^{(n+1)}$ στα εσωτ. σημεία του I. Τότε $\forall x \in I$ υπάρχει ρ μεταξύ x και ξ τ.ω

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-\xi)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^n + \frac{f^{(n+1)}(\rho)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1} \quad \forall x \in I$$

* <u>Απόδειξη.</u>

Έστω $n=1$. Για <u>σταθερά x, ξ</u> ορίζουμε τον αριθμό A έτσι ώστε

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{A}{2}(x-\xi)^2 \quad (*)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση (x = σταθ.)

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{A}{2}(x-t)^2$$

g παραγωγίσιμη, $g(\xi) = 0$ λόγω $(*)$

$g(x) = 0$.

Από Θ.Μ.Τ $\exists\, \rho$ μεταξύ x και ξ τ.ω $g'(\rho) = 0$.

$$g'(\rho) = 0 \implies A = f''(\rho).$$

Έτσι δείξαμε το Θεώρημα για $n=1$

Με ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε την γενική περίπτωση.

* Απροσδιόριστες Μορφές.

Κανόνας L'Hospital I $\left(\frac{0}{0}\right)$

$f, g : (\xi, b) \to \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$. $\forall x \in (\xi, b)$

και $\lim\limits_{x \to \xi^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \xi^+} g(x) = 0$.

Αν το $\lim\limits_{x \to \xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει τότε $\lim\limits_{x \to \xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(Τα ίδια αν $x \to \xi^-$, $x \to \xi$, $x \to \pm\infty$)

* Απόδειξη

Έστω $\lim\limits_{x \to \xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = n$. Άρα για $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ τ.ω

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - n \right| < \varepsilon \quad \forall x \in (\xi, \xi+\delta).$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - \overset{=0}{f(\xi)}}{g(x) - \underset{=0}{g(\xi)}} \underset{\text{ΘΜΤ(Cauchy)}}{=} \frac{f'(p)}{g'(p)} , \quad p \in (\xi, x) \subset (\xi, \xi+\delta).$$

τότε $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - n \right| = \left| \frac{f'(p)}{g'(p)} - n \right| < \varepsilon$ Άρα $\lim\limits_{x \to \xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = n$

Κανόνας L'Hospital II $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$

f, g παραγωγίσιμες στο $(\xi, b) \to \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (\xi, b)$

και $\lim\limits_{x \to \xi^+} g(x) = +\infty$ (ή $-\infty$) Αν το $\lim\limits_{x \to \xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει τότε

$$\lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(*παρατήρηση: το $\lim\limits_{x \to \xi^+} f(x)$ μπορεί να μην υπάρχει!)

* Παραδείγματα

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{a^x}$ $\quad (a>1,\ b>0)$

Έστω $b=1$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{a^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x)'}{(a^x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(\ln a)a^x} \longrightarrow 0$

$(a^x)' = e^{x\cdot\ln a} = \ln a \cdot e^{x\cdot \ln a} = (\ln a)a^x$

Αν $b\neq 1$ τότε

$$\frac{x^b}{a^x} = \left(\frac{x}{a^{1/b\cdot x}}\right)^b \xrightarrow{(x\to+\infty)} 0$$

---

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\underbrace{x\cdot \ln x}_{(0)(-\infty)}) = \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$

---

3) $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$, $\quad x^{1/x} \xrightarrow{x\to+\infty} ;$

$x^{1/x} = e^{1/x\cdot \ln x}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

Άρα $\quad x^{1/x} = e^{1/x\cdot \ln x} \longrightarrow e^0 = 1.$

---

* Τάξη μεγέθους / ασυμπτωτική ισότητα

Ορισμός

$f, g \qquad g\neq 0$

i) Αν $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ τότε f μικρότερης τάξης μεγέθους από την g κοντά στο ξ και γράφω $f(x) = o(g(x))$ x κοντά στο ξ.

μικρό όμικρον (o)

*παράδειγμα

$x^2 = o(x)$, $\quad x \simeq 0^+ \quad \left(\dfrac{x^2}{x} \xrightarrow{x\to 0^+} 0\right).$

ii) Αν $\kappa < \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| < M$ για x κοντά στο ξ τότε f ίδια τάξη μεγέθους με την g κοντά στο ξ. και γράφω $f(x) = O(g(x))$ $x \simeq \xi$.