



Δευτέρα 13 Ιανουαρίου 2020

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός Ι – Τμήμα Β

Τελικό Διαγώνισμα

1) (2,4 μ.) Υπολογίστε τα όρια εφ'οσον υπάρχουν ή δείξτε οτι δεν υπάρχουν

(i) $a_n = \sqrt{n^4 + n^2} - \sqrt{n^4 + 1}$, (ii) $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n}$, $b_1 = 1$, (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{2})$.

2) (1,4 μ.) Βρείτε το $a > 0$ για το οποίο η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$y = a \ln x + 2a - x^2,$$

στο διάστημα $(0, +\infty)$ παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή. Ποιά είναι αυτή η τιμή;

3) (1,4 μ.) Δείξτε οτι για κάθε $x > 0$

$$x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x.$$

4) (2,4 μ.) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\sqrt[n]{n} + 0,1)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{x dx}{1+x^3}.$$

5) (2,4 μ.) Υπολογίστε τα γενικευμένα ολοκληρώματα εφ'οσον υπάρχουν ή δείξτε οτι δεν υπάρχουν

$$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x} - e^{-x}}{x} dx, \quad \int_0^1 \ln x dx.$$

Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πλήρως δικαιολογημένες.

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες.