ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τετάρτη 14 Οκτωβρίου 2020

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 1

1). Αν f συνεχής συνάρτηση δείξτε οτι

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} u(x)dx = u(x_0), \qquad \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|\partial B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} u(x)dS_x = u(x_0).$$

2). Αν $u \in C^2(U)$ και για κάθε μπάλα $B \subset U$ ισχύει

$$\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0,$$

δείξτε οτι η u είναι αρμονική στο U. (Το ν είναι το μοναδιαίο κάθετο προς τα έξω στην επιφάνεια ∂B).

3). Έστω $k > 0$. Βρείτε ακτινικά συμμετρική συνάρτηση u που να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}^3.$$

Για το σκοπό αυτό αναζητήστε την συνάρτηση στη μορφή $\Phi(r) = \frac{f(r)}{r}$ με $r = |x|$ και $f(0) > 0$. (Απ. $\Phi(r) = \frac{A\sin k(r-R)}{r}$.)

Αν $f \in C_c^2(\mathbf{R}^3)$ βρείτε σχέση μεταξύ των σταθερών A και R ωστε η Φ να είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = -f(x), \qquad x \in \mathbf{R}^3,$$

δηλ. η συνάρτηση

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^3} \Phi(x-y) f(y) dy,$$

να είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

4). Αν $u \in C^2(U)$ ικανοποιεί

$$u(x) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} u(y)dS_y,$$

για κάθε $B(x,r) \subset U$ τότε η u είναι αρμονική στο U.(Δείξτε οτι η u εχει την ιδιότητα της μέσης τιμής, όπου η μέση τιμή λαμβάνεται στη σφαίρα, οπότε το ανάγουμε στο Θ. του Evans που είδαμε στη τάξη).

5). Εστω $n \geq 3$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$u(x) = \frac{1}{n(n-2)a_n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy, \qquad x \in \mathbf{R}^n.$$

(α) Αν $f \in C_c(\mathbf{R}^n)$ (δηλ. η f είναι συνεχής με συμπαγή φορέα) δείξτε οτι η u ορίζεται καλά, είναι $C^1(\mathbf{R}^n)$ και επι πλέον

$$u_{x_i}(x) = -\frac{1}{na_n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{(x_i - y_i) f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy.$$

Για το σκοπό αυτό έστω η συνάρτηση cut off (συνάρτηση κόφτης) $\phi(t) \in C^1(\mathbf{R})$ με $0 \leq \phi \leq 1$, $0 \leq \phi' \leq C_0$, $\phi(t) = 0$ για $t \leq 1$ και $\phi(t) = 1$ για $t \geq 2$. Για $\varepsilon > 0$ ορίζουμε $\phi_\varepsilon(t) = \phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ και

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{n(n-2)a_n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} \phi_\varepsilon(|x-y|) dy.$$

Στη συνέχεια δείξτε οτι $u_\varepsilon \to u$ και

$$u_{\varepsilon, x_i} \to -\frac{1}{na_n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{(x_i - y_i) f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy,$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$. Παρατηρήστε οτι το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει όταν η f είναι φραγμένη, ολοκληρώσιμη και με συμπαγή φορέα.

(β) Αν $f \in C_c^1(\mathbf{R}^n)$ τοτε δείξτε οτι $u \in C_c^2(\mathbf{R}^n)$ και επι πλέον

$$u_{x_i x_j}(x) = -\frac{1}{na_n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{(x_i - y_i) f_{x_j}(y)}{|x-y|^{n-2}} dy,$$

και

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \qquad x \in \mathbf{R}^n, \\ \lim_{|x| \to \infty} u(x) &= 0. \end{aligned}$$

6). Έστω $u \in C^2(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$, όπου $B(0,1) \subset \mathbf{R}^2$, (δηλ. είμαστε στις **2 διαστάσεις**) η οποία ικανοποιεί

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in B(0,1), \\ u(x) &= g(x), \quad x \in \partial B(0,1) \ , \end{aligned}$$

όπου f και g γνωστές συνεχείς συναρτήσεις. Σκοπός της άσκησης είναι να δείξουμε ότι

$$2\pi u(0) = \int_{\partial B(0,1)} g(x) dS_x - \int_{B(0,1)} f(x) \ln |x| dx \ . \qquad (1)$$

Έστω

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(0,r)} u(x)dx, \qquad 0 < r \leq 1.$$

(α) Υπολογίστε το $\phi'(r)$ όπως στην τάξη.

(β) Ξεκινώντας απο τη σχέση

$$\phi(\varepsilon) = \phi(1) - \int_{\varepsilon}^{1} \phi'(r)dr, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

και κάνοντας χρήση του αποτελέσματος του (α), δείξτε την (1).

7). Έστω $\{u_k(x)\}$ μία φραγμένη ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων στο ανοικτό φραγμένο χωρίο U. Δείξτε οτι υπάρχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει (έστω) στην u ομοιόμορφα στα συμπαγή, καθώς και οτι η u είναι αρμονική στο U.

Παράδοση: Δευτέρα 26 Οκτωβρίου