ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 27 Οκτωβρίου 2020

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 2

1). Εστω $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ ανοικτό συνεκτικό σύνολο και u_n ακολουθία θετικών αρμονικών συναρτήσεων στο Ω. Αν $u_n(x_0) \to 0$ για κάποιο σημείο $x_0 \in \Omega$ δείξτε οτι $u_n(x) \to 0$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω. Δηλ. αν $K \subset \Omega$ συμπαγές τότε $u_n(x)|_K \to 0$ ομοιόμορφα.

2). Έστω $\{u_n\}$ μία άυξουσα ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων στο χωρίο Ω και υποθέτουμε οτι σε κάποιο σημείο $x_0 \in \Omega$ η ακολουθία $\{u_n(x_0)\}$ είναι φραγμένη. Δείξτε οτι η ακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω σε μία αρμονική συνάρτηση.

3). Έστω $v \in C^0(\Omega)$ υφαρμονική συνάρτηση στο χωρίο Ω και $w = H_{B_0}[v]$ η αρμονική ανύψωση της v στην μπαλα $B_0 \subset \Omega$. Δείξτε ότι η $w = H_{B_0}[v]$ είναι C^0 υφαρμονική.

4) Έστω $x = (x', x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$,

$$B_1^+ = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1, \quad x_n > 0\},$$

και συνάρτηση $u \in C^2(\overline{B_1^+})$ τ.ω.

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x_n \geq 0 \\ -u(x', -x_n) & x_n < 0. \end{cases}$$

(α) Αν u αρμονική δείξτε οτι και v είναι αρμονική στην $B_1 = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$

(β) Αν μόνο $u \in C^2(B_1^+) \cap C^0(\overline{B_1^+})$ και αρμονική στην B_1^+ τότε η v πάλι είναι αρμονική στην B_1.

5). Αν $u \in C^2(\mathbf{R}^n_+) \cap C^0(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ είναι αρμονική, φραγμένη και τ.ω.

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0, \qquad \forall x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1},$$

δείξτε ότι

$$u(x) \equiv 0, \qquad x \in \mathbf{R}^n_+.$$

6). Έστω ο πυρήνας του Poisson για τον $\mathbf{R}^n_+$,

$$K(x,y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|x-y|^n} \qquad x \in \mathbf{R}^n_+, \quad y \in \partial\mathbf{R}^n_+.$$

Αφού πρώτα ανάγεται το παρακάτω ολοκλήρωμα σε ολοκλήρωμα μίας μεταβλητής, δείξτε ότι όταν $n = 2, 3$

$$\int_{\partial\mathbf{R}^n_+} K(x,y)dy = 1.$$

Προαιρετικά, όποιος θέλει, ας δείξει το ίδιο όταν $n \geq 4$.

7). Έστω u η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^n_+ \\ u &= g \quad \text{on} \quad \partial\mathbf{R}^n_+, \end{aligned}$$

όπου η g είναι μία φραγμένη συνάρτηση με $g(x) = |x|$ για $x \in \partial\mathbf{R}^n$, $|x| \leq 1$. Εκτιμώντας το όριο

$$\frac{u(he_n) - u(0)}{h}, \qquad 0 < h \to 0,$$

δείξτε οτι η Du δεν είναι φραγμένη κοντά στο $x = 0$.

8). Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Poisson για την μπάλα και την ιδιότητα της μέσης τιμής για αρμονικές συναρτήσεις στη μπαλα $B(0,r)$, δείξτε οτι αν $u(x)$ είναι θετική αρμονική συνάρτηση στη μπάλα $B(0,r)$ και συνεχής στην $\overline{B(0,r)}$, τότε

(α)

$$r^{n-2}\frac{r-|x|}{(r+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2}\frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}}u(0), \qquad x \in B(0,r).$$

(β) Αν $V \subset\subset B(0,r)$, βρείτε θετική σταθερά $C = C(V)$ τ.ω.

$$\sup_V u(x) \leq C \inf_V u(x).$$

9). Όπως έχουμε πεί, η $v \in C^2(\bar{U})$ λέγεται υφαρμονική εαν

$$-\Delta v \leq 0, \qquad \text{in} \quad U.$$

(α) Αν $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ομαλή και κυρτή και u αρμονική, τότε $v = \phi(u)$ υφαρμονική.

(β) Αν u αρμονική τότε $v = |Du|^2$ υφαρμονική.

Παράδοση: Δευτέρα 9 Νοεμβρίου