ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 12 Νοεμβρίου 2020

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 3

1). Η u είναι αρμονική στην 'τρύπια' μπάλα με ακτίνα $\frac{3}{2}$, $B(0,\frac{3}{2})\setminus\{0\}\subset\mathbf{R}^n$, $n\geq 2$. Έστω ότι γνωρίζουμε ότι καθώς $x\to 0$ έχουμε ότι $u(x)=o(|\ln|x||)$ όταν $n=2$ ή $u(x)=o(|x|^{2-n})$ αν $n\geq 3$. Θα δείξουμε οτι η u είναι φραγμένη. Έστω $n\geq 3$.

(α) Με χρήση αρχής μεγίστου δείξτε οτι υπάρχει σταθερα $C>0$ τ.ω.

$$u(x)\leq C+\varepsilon|x|^{2-n},\qquad r<|x|<1,\quad\forall\varepsilon>0,\quad\forall r\in(0,1).$$

(β) Η u είναι φραγμένη στην $B(0,1)\setminus\{0\}$.

(γ) Εργαστείτε αντίστοιχα για $n=2$.

2). Έστω $u\in C^2(\mathbf{R}^n)$ κλασική λύση της

$$\Delta u-u=f(x),\qquad |u|<1,\qquad x\in\mathbf{R}^n\ .$$

Σκοπός της άσκησης είναι να δείξουμε οτι αν

$$|f(x)|\leq e^{-\frac{1}{2}|x|},\qquad x\in\mathbf{R}^n,$$

τότε για κατάλληλη σταθερά $C>0$,

$$|u(x)|\leq Ce^{-\frac{1}{2}|x|},\qquad x\in\mathbf{R}^n. \tag{1}$$

(α) Με κατάλληλη χρήση αρχής μεγίστου δείξτε οτι υπάρχει σταθερά $C_1>0$ τ.ω. για κάθε $\varepsilon\in(0,1)$ υπάρχει $R_\varepsilon>0$ με την ιδιότητα

$$u(x)\leq C_1e^{-\frac{1}{2}|x|}+\varepsilon e^{\frac{1}{2}|x|},\qquad 1<|x|<R,\qquad\forall R\geq R_\varepsilon.$$

(β) Δείξτε την (1).

3). Το $U\subset\mathbf{R}^n$ είναι φραγμένο, ομαλό και συνεκτικό. Η u είναι ομαλή και ικανοποιεί την

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(x)=0,\qquad x\in U,$$

όπου ο L είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός και $a_{ij} \in C^1(\bar{U})$. Θέτουμε

$$v := |\nabla u|^2 + \lambda u^2.$$

(α) Δείξτε οτι για κατάλληλα μεγάλη σταθερά λ,

$$Lv \leq 0, \qquad x \in U.$$

(β) Συμπεράνετε οτι

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(U)} \leq C(\|\nabla u\|_{L^\infty(\partial U)} + \|u\|_{L^\infty(\partial U)}),$$

για κάποια θετική σταθερά C που εξαρτάται μόνο από τους συντελεστές του L.

Υπόδ. Για το (α), για ευκολία κοιτάξτε πρώτα την περίπτωση $n = 1$.

4) Έστω η αρμονική συνάρτηση $u(x) = xy$ ορισμένη στη μοναδιαία μπάλα $B(0,1)$. Βρείτε τα ακρότατά της u στην $\overline{B(0,1)}$ και υπολογίστε στα σημεία αυτά την $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, όπου ν το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα. Στη συνέχεια επιβεβαιώστε το Λήμμα του Hopf.

5) Υποθέτοντας οτι η παρακάτω εξίσωση έχει κλασική λύση

$$\begin{aligned} -\Delta u + u^3 &= f, \qquad x \in U \\ u &= g, \qquad x \in \partial U, \end{aligned}$$

με f, g ομαλές συναρτήσεις, δείξτε ότι η λύση είναι μοναδική.

(α) Με χρήση αρχής μεγίστου.

(β) Με χρήση ενεργειακών εκτιμήσεων.

Παράδοση: Τετάρτη 25 Νοεμβρίου