ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 26 Νοεμβρίου 2020

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 4

1). Η συνάρτηση $g(x) \in L^\infty(\mathbf{R})$ ειναι συνεχής εκτός από ένα σημείο x_0 στο οποίο υπάρχουν τα πλευρικά όρια αλλά δεν είναι ίσα:

$$\lim_{x\to x_0^-} g(x) = l^- \neq l^+ = \lim_{x\to x_0^+} g(x).$$

Έστω

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y,t)g(y)dy,$$

όπου Φ η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης της θερμότητας στον $\mathbf{R}\times(0,\infty)$. Σκοπός της άσκησης είναι να μελετήσουμε το όριο

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t)\ . \tag{1}$$

Χωρίς βλαβη της γενικότητας έστω $x_0 = 0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$g^+(x) = \begin{cases} g(x), & x>0,\\ l^+, & x\le 0 \end{cases}, \qquad g^-(x) = \begin{cases} g(x), & x<0,\\ l^-, & x\ge 0 \end{cases}$$

(α) Εκφράστε την $u(x,t)$ ως συνάρτηση των $g^+,\ g^-,\ l^+,\ l^-$ και Φ.

(β) Μελετήστε το όριο (1) λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο που τα σημεία (x,t) προσεγγίζουν το σημείο $(0,0)$.

2). Η $u(x,t)$ είναι φραγμένη λύση του προβλήματος Cauchy της εξίσωσης θερμότητας

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \qquad x\in\mathbf{R},\quad t>0,\\ u(x,0) &= \phi(x)\ , \end{aligned}$$

όπου η $\phi\in C(\mathbf{R})$ ικανοποιεί

$$\lim_{x\to-\infty}\phi(x) = a, \qquad \lim_{x\to+\infty}\phi(x) = b.$$

Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t), \qquad x\in\mathbf{R}.$$

3). Έστω το μή γραμμικό ΠΣΑΤ

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + g(t,x,u)u_x &= F(t,x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 < x < L, \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad t > 0, \end{aligned}$$

όπου g, F και f ομαλές συναρτήσεις.

(α) Δείξτε οτι η παραπάνω εξίσωση ικανοποιεί αρχή μεγίστου. Συγκεκριμένα αποδείξτε οτι αν

$$u_t - u_{xx} + g(t,x,u)u_x \le 0, \quad (x,t) \in U_T,$$

$$\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\bar{\Gamma}_T} u,$$

όπου $U_T = (0,L) \times [0,T)$, και Γ_T το παραβολικό σύνορο.

(β) Αν $M = \max_{0 \le x \le L} |f(x)|$, $N = \max_{\bar{U}_T} |F(x,t)|$ και u κλασική λύση δείξτε οτι

$$|u(x,t)| \le M + NT \ , \quad (x,t) \in U_T.$$

4). Έστω $U \subset \mathbf{R}^n$ φραγμένο χωρίο και $0 < T < \infty$. Αν $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ λύση του ΠΣΑΤ

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= -u^3, \quad x \in U, \quad 0 < t < T, \\ u(x,0) &= 0, \quad x \in U, \\ u(x,t) &= 0, \quad x \in \partial U, \quad 0 < t < T, \end{aligned}$$

δείξτε οτι $u = 0$ στο U_T.

(α) Με χρήση ενεργειακών εκτιμήσεων.

(β) Με χρήση αρχής μεγίστου.

5). (Λήμμα Hopf, απλή περίπτωση) Έστω $U = (0,1)$, $U_T = U \times (0,T]$ και $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C^1(\bar{U}_T)$ ικανοποιεί την

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad x \in U_T,$$

Υποθέτουμε οτι υπάρχουν $t_0 \in (0,T]$ και $m \in \mathbf{R}$ τ.ω. $u(0,t_0) = m$ και

$$u(x,t) > m, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 < t < t_0,$$

(α) Βρείτε συνάρτηση $w(x,t)$ τ.ω. $w(0,t_0) = 0$, $w_x(0,t_0) > 0$ και σε μία γειτονιά R του $(0,t_0)$ να ικανοποιεί

$$w(x,t) \le u(x,t) - m,$$

Υποδ. Έστω $R = \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{t_0}{2},\ t_0\right)$. Για την εύρεση της w χρησιμοποιήστε κατάλληλα τη συνάρτηση $z(x,t) = e^x - 1$.

(β) Δείξτε οτι

$$u_x(0,t_0) > 0.$$

Παράδοση: Τετάρτη 9 Δεκεμβρίου