ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρασκευή 11 Δεκεμβρίου 2020

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 5

1). Έστω οτι η $u \in C^2(\mathbf{R} \times [0, \infty))$ λύνει την κυματική εξίσωση στη μία διάσταση.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x),$$

Ολοκληρώστε την εξίσωση στο τρίγωνο με κορυφή το σημείο $(x,\ t)$, βαση στον άξονα $t = 0$ και πλευρές στις χαρακτηριστικές ευθείες που διέρχονται από το $(x,\ t)$. Με χρήση του Θεωρήματος Green παράγετε τον τύπο του D'Alambert.

2). Έστω οτι η $u \in C^2(\mathbf{R} \times [0, \infty))$ λύνει την κυματική εξίσωση στη μία διάσταση.

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x),$$

όπου g και h έχουν συμπαγή φορέα. Δείξτε οτι απο ένα χρόνο T και μετά ισχύει

$$\int_{\mathbf{R}} u_t^2 dx = \int_{\mathbf{R}} u_x^2 dx, \qquad t \geq T.$$

3) Έστω $f \in C^3(\mathbf{R}^3)$, και

$$u(x,t) = \int_{S(x,t)} \frac{f(y)}{t} dS_y, \qquad I(x,t) = \int_{B(x,t)} \Delta f(y) dy\ ,$$

όπου $B(x,t)$ η μπάλα κέντρου x και ακτίνας t και $S(x,t) = \partial B(x,t)$ η αντίστοιχη σφαίρα.

(α) Δείξτε οτι

$$u_t = \frac{u + I}{t}.$$

(β) Δείξτε ότι

$$u_{tt} = \Delta u, \qquad x \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0.$$

(γ) Τι αρχικές συνθήκες ικανοποιεί η u;

4) Έστω $u \in C^2(\mathbf{R}^3)$ η λύση της

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, \qquad x \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbf{R}^3 \\ u_t(x,0) &= h(x), \quad x \in \mathbf{R}^3, \end{aligned}$$

με g, h ομαλές συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Δείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά C_0 τ.ω.

$$|u(x,t)| \leq \frac{C_0}{\sqrt{t^2+1}}, \qquad x \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0.$$

5). Έστω $u(x,t)$ η λύση της εξίσωσης Korteweg–de Vries

$$u_t + uu_x = u_{xxx}, \qquad x \in I = [0, 2\pi],$$

με 2π–περιοδικές συνοριακές συνθήκες, δηλ.

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}(0,t) = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}(2\pi,t) \qquad t \geq 0, \quad i = 0,1,2,3\ ,$$

και αρχικά δεδομένα $u(x,0) = f(x)$ με $f \in C^3(I)$ και 2π–περιοδική.

(α) Δείξτε οτι η 'ενεργειακή ποσότητα'

$$E_1(t) = \int_0^{2\pi} u^2(x,t)dx,$$

παραμένει σταθερή στο χρόνο.

(β) Δείξτε οτι και η 'ενεργειακή ποσότητα'

$$E_2(t) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} u_x^2(x,t) + \frac{1}{6} u^3(x,t) \right) dx,$$

παραμένει σταθερή στο χρόνο.

(γ) Δείξτε οτι αν $v \in C^1(I)$ με $v(0) = v(2\pi)$ τότε υπάρχει σταθερά $A > 0$ τ.ω.

$$\|v\|^2_{L^\infty(I)} \leq A\Big(\int_I v^2 dx + \int_I v_x^2 dx\Big).$$

Βρείτε μιά τέτοια σταθερά.

(δ) Δείξτε οτι η sup νόρμα της λύσης $\|u\|_{L^\infty(I)}(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο χρόνο, δηλ. οτι υπάρχει σταθερά C_0 τ.ω.

$$\|u\|_{L^\infty(I)}(t) < C_0, \qquad \forall t \geq 0.$$

6) Λύστε με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών

(α) $x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_{x_3} = 3u, \quad u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2).$

(β) $u_t + u_x^2 = t, \quad t > 0, \qquad u(x, 0) = x.$

(γ) $u u_{x_1} + u_{x_2} = 1, \quad u(x_1, x_1) = \frac{1}{2} x_1.$

Παράδοση: Τετάρτη 23 Δεκεμβρίου