



Πέμπτη 18 Απριλίου 2019

Γ. Καραλή, Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Φυλλάδιο 11

1)<sup>⊗</sup> Δείξτε ότι η

$$xy + z + 3xz^5 = 4,$$

λύνεται με το  $z$  σαν συνάρτηση του  $(x, y)$  κοντά στο  $(1, 0, 1)$ . Υπολογίστε τις  $\frac{\partial z}{\partial x}$  και  $\frac{\partial z}{\partial y}$  στο  $(x, y) = (1, 0)$ .

2)<sup>⊗</sup> Δείξτε ότι η

$$x^3z^2 - z^3yx = 0,$$

λύνεται ως προς  $z$ , σαν συνάρτηση του  $(x, y)$  κοντά στο  $(1, 1, 1)$ , όχι όμως κοντά στην αρχή των αξόνων. Υπολογίστε τις  $\frac{\partial z}{\partial x}$  και  $\frac{\partial z}{\partial y}$  στο  $(x, y) = (1, 1)$ .

3)<sup>⊗</sup> Εξετάστε την επιλυσιμότητα του παρακάτω συστήματος

$$3x + 2y + z^2 + u + v^2 = 0$$

$$4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 = 0$$

$$x + z + w + u^2 + 2 = 0,$$

ως προς  $u, v, w$  συναρτήσει των  $x, y, z$  κοντά στο  $x = y = z = 0$ ,  $u = v = 0$  και  $w = -2$ .

4)<sup>⊗</sup> Θεωρούμε την

$$f(x, y) = \left[ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{xy}{x^2 + y^2} \right].$$

Αντιστρέφεται τοπικά αυτή η απεικόνιση του  $\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0)$  στον  $\mathbf{R}^2$  κοντά στο  $(x, y) = (0, 1)$ ;

5) Βρείτε τα ακρότατα της

$$z = \cos^2 x + \cos^2 y,$$

υπό τη συνθήκη

$$x + y = \frac{\pi}{4}.$$

6) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης, υπολογίστε την  $\frac{dy}{dx}$  για τις

(a)  $x/y = 10$

(b)  $x^3 - \sin y + y^4 = 4$

(c)  $e^{x+y^2} + y^3 = 0$ .

7) Βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της

$$f(x, y) = xy - y + x - 1,$$

για  $(x, y)$  στον κλειστό δίσκο  $x^2 + y^2 \leq 2$ .

8) Έστω  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  κλάσεως  $C^1$  και ας θέσουμε

$$u = f(x)$$

$$v = -y + xf(x).$$

Αν  $f'(x_0) \neq 0$ , δείξτε ότι αυτός ο μετασχηματισμός του  $\mathbf{R}^2$  στον  $\mathbf{R}^2$  είναι αντιστρέψιμος κοντά στο  $(x_0, y)$  και ο αντίστροφός του δίνεται από τις

$$x = f^{-1}(u)$$

$$y = -v + uf^{-1}(u).$$

9) Δείξτε ότι οι εξισώσεις

$$x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0$$

$$2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0,$$

προσδιορίζουν συναρτήσεις  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$  κοντά στα  $x = 2$  και  $y = -1$ , τέτοιες ώστε  $u(2, -1) = 2$  και  $v(2, -1) = 1$ . Υπολογίστε την  $\frac{\partial u}{\partial x}$  στο  $(2, -1)$ .

10) Βρείτε το μέγιστο γινόμενο των θετικών αριθμών  $x, y, z$  δεδομένου ότι

$$x + y + z^2 = 16.$$

11) Προσδιορίστε το μέγιστο και το ελάχιστο της

$$f(x, y, z) = (x - 1)^4 + (y + 1)^4 + (z - 1)^4,$$

με συνθήκη

$$x^4 + y^4 + z^4 = 48.$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με ⊗

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)