ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 9 Μαίου 2019

Γ. Καραλή, Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Φυλλάδιο 12

1)$^{\otimes}$ Ελέγξετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς ή/και παραγωγίσιμες στο αντίστοιχο σημείο.

(i) $f(x,y,z) = 3x^2z + xye^{\cos^2 z}$, στο σημείο $(1,1,2)$.

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+2y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad \text{στο σημείο} \quad (0,0).$$

(iii)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+2y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad \text{στο σημείο} \quad (0,0).$$

2)$^{\otimes}$ Μια ισοσταθμική επιφάνεια μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x,y,z)$ έχει σε ένα σημείο της (x_0,y_0,z_0) εφαπτόμενο επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση

$$3x - 2y + 6z = 15 \quad \text{και} \quad \nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0).$$

Σε ποιές κατευθύνσεις $\mathbf{v}$ από το (x_0,y_0,z_0) είναι δυνατόν να έχει η συνάρτηση (α) μέγιστο στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής; (β) ελάχιστο στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής; (γ) μηδενικό στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής;

3)$^{\otimes}$ Δίνεται $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}, \ x,y \in \mathbf{R}.$$

Αποδείξτε ότι

$$-e^{-\frac{1}{2}} \leq f(x,y) \leq e^{-\frac{1}{2}}, \ \forall x,y \in \mathbf{R}.$$

4)$^{\otimes}$ Στις παρακάτω περιπτώσεις υπολογίστε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της f συναρτήσει των μερικών παραγώγων μέχρι και δεύτερης τάξης των εμπλεκομένων στον τύπο της συναρτήσεων.

- $f(x,y,z) = g(u(x,y), v(y,z), w(y,z))$.
- $f(x,y,z) = g(u(x), v(x,y), w(x,y,z))$.

5)$^{\otimes}$ Έστω $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ είναι $C^1(\mathbf{R}^2)$ συνάρτηση που ικανοποιεί

$$f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y) = 1,\ x, y \in \mathbf{R}.$$

Θέτουμε $g(r,\theta) = f(x,y)$, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi)$.
Αποδείξτε ότι

$$g_r^2(r,\theta) + \frac{1}{r^2} g_\theta^2(r,\theta) = 1,\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi).$$

6) Έστω E το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της $f(x,y) = x^2 + 3xy$ στο σημείο $(1,1,4)$. Σε ποια σημεία της η επιφάνεια με καρτεσιανή εξίσωση $5x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$ έχει εφαπτόμενο επίπεδο παράλληλο με το E;

7) Εξετάστε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης αν το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς τα u, v ως συναρτήσεις $u = u(x)$, $v = v(x)$ με συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $x_0 = 0$ και έτσι ώστε να είναι $u_0 = u(0) = 1$, $v_0 = v(0) = 1$. Βρείτε τύπο για τις παραγώγους $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ συναρτήσει των x, u, v κοντά στα $x_0 = 0$, $u_0 = 1$, $v_0 = 1$.

$$e^{xv} + x + u = 2, \qquad v + xe^u = 1.$$

8) Έστω

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

(i) Να προσδιορίσετε στον $\mathbf{R}^2$ τα σημεία όπου η f λαμβάνει τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα,

(ii) προσδιορίστε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f στο κλειστό χωρίο $x^2 + y^2 \leq 1$.

9) Αφού εξηγήσετε γιατί οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο αντίστοιχο σύνολο A, προσδιορίστε αυτές τις τιμές. Στο σύνορο του A εργαστείτε με δύο τρόπους: (α) χρησιμοποιείστε κατάλληλες παραμετρικοποιήσεις ώστε να αναγάγετε το πρόβλημα σε πρόβλημα μιας μεταβλητής, (β) χρησιμοποιείστε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών *Lagrange*.

- $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ στο $A = \{(x,y)|\ x^2 + y^2/4 \leq 1\}$.
- $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ στο $A = \{(x,y)|\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$.
- $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ στο τρίγωνο A (εσωτερικά και συνοριακά σημεία) με κορυφές $(0,0), (0,3), (2,0)$.

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)