



Πέμπτη 14 Φεβρουαρίου 2019

Γ. Καραλή, Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός II

Φυλλάδιο 2

1)[⊗] Να περιγράψετε

1. τις επιφάνειες (α) $r = \text{σταθερά}$, (β) $\theta = \text{σταθερά}$ (γ) $z = \text{σταθερά}$, στο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων.
2. τις επιφάνειες (α) $\rho = \text{σταθερά}$, (β) $\theta = \text{σταθερά}$ (γ) $\phi = \text{σταθερά}$, στο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων.

2) Περιγράψτε τη γεωμετρική σημασία των παρακάτω απεικονίσεων (που είναι γραμμένες σε σφαιρικές συντεταγμένες):

1. $(\rho, \theta, \phi) \rightarrow (\rho, \theta + \pi, \phi)$
2. $(\rho, \theta, \phi) \rightarrow (\rho, \theta, \pi - \phi)$
3. $(\rho, \theta, \phi) \rightarrow (2\rho, \theta + \frac{\pi}{2}, \phi)$

3) Μια δεξαμενή με σχήμα ορθού κυλίνδρου, ακτίνας 10 ποδών και ύψους 16 ποδών είναι μισογεμάτη και ακουμπάει στην πλευρά της. Περιγράψτε τον χώρο που καταλαμβάνει ο αέρας μέσα στη δεξαμενή, διαλέγοντας κατάλληλες κυλινδρικές συντεταγμένες.

4)[⊗] Αποδείξτε την ανισότητα *Cauchy – Schwarz* για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2 dx} \sqrt{\int_0^1 [g(x)]^2 dx}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Υποδ. Χρησιμοποιήστε το ίδιο επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στην τάξη για την απόδειξη της *Cauchy – Schwarz* στον $\mathbf{R}^n$.

5)[⊗] Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από Καρτεσιανές σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες και σχεδιάστε τα: (α) $(0, 3, 4)$, (β) $(-\sqrt{2}, 1, 0)$, (γ) $(0, 0, 0)$, (δ) $(-1, 0, 1)$ καθώς και (ε) $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$.

6)[⊗] Σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης και τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x - y + 2$

2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x^2 + 4y^2$

3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow -xy$

7) Να σχεδιάσετε τις καμπύλες στάθμης (στο επίπεδο xy) για τη συνάρτηση f και τις ειδικές τιμές του c που δίνονται. Σχεδιάστε πρόχειρα το γράφημα της $z = f(x, y)$, όπου

$$f(x, y) = (100 - x^2 - y^2)^{1/2}, \quad c = 0, 2, 4, 6, 8, 10.$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με ⊗

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)