



Πέμπτη 28 Φεβρουαρίου 2019

Γ. Καραλή, Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός II

Φυλλάδιο 4

1)⊗ Βρείτε τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν)

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^3}{x^6 + y^4}, \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sin(x - y + 1)}{x + y - 3}, \quad (c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^{y^2}.$$

2)⊗ Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4 + y^4}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)], \quad \lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)].$$

Υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) ?$$

3)⊗ Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} (x - y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, & \text{αν } xy \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = y = 0 \end{cases}$$

α) Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)]$.

β) Να δειχθεί ότι η $f(x, y)$ είναι συνεχής στο σημείο $(0, 0)$.

4)⊗ Βρείτε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων

$$(a) f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3}, \quad (b) f(x, y, z) = x^2 y z^3, \quad (c) f(x, y) = x^y - y \sin x,$$

$$(d) f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2.$$

5) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sin x \sin y}, \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right).$$

6) Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \text{ ή } y \geq x^2, \\ 1, & 0 < x < x^2. \end{cases}$$

Να δείξετε ότι $f(x, y) \rightarrow 0$ καθώς $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ κατά μήκος οποιασδήποτε ευθείας περνάει από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε μια καμπύλη που περνάει από την αρχή των αξόνων όπου κατά μήκος της οποίας, εκτός από την αρχή των αξόνων, η συνάρτηση παίρνει τη σταθερή τιμή 1. Υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) ?$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με \otimes

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)