ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 14 Μαρτίου 2019

Γ. Καραλή, Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Φυλλάδιο 6

1)$^{\otimes}$ Έστω $f(x,y)=x^2+y$, $\mathbf{h}(u)=(\sin 3u,\ \cos 8u)$ και $g(u)=f(\mathbf{h}(u))$. Υπολογίστε τη $\frac{dg}{du}$ στο $u=0$ απ' ευθείας και με χρήση του κανόνα της αλυσίδας.

2)$^{\otimes}$ Αν g είναι μία C^1 συνάρτηση και $f(x,y)=g\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ δείξτε ότι

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

3)$^{\otimes}$ Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Σε ποιά κατεύθυνση η κατευθυνόμενη παράγωγος στο σημείο $(1,1)$ είναι
α) ίση με μηδέν;
β) η μεγαλύτερη δυνατή;
γ) η μικρότερη δυνατή;

4)$^{\otimes}$ Έστω $f,\,g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$. Υποθέτουμε οτι η f είναι παραγωγίσιμη και $\nabla f(\mathbf{x})=g(\mathbf{x})\mathbf{x}$. Δείξτε οτι οι σφαίρες με κέντρο την αρχή των αξόνων περιέχονται στα σύνολα στάθμης της f. Δηλ. η f είναι σταθερή αν περιοριστεί σε τέτοιες σφαίρες.

5) Έστω οτι η $y(x)$ είναι παραγωγίσιμη και ορίζεται πεπλεγμένα απο την $G(x,y)=0$ όπου η G δοσμένη παραγωγίσημη συνάρτηση, δηλαδή ισχύει

$$G(x,y(x))=0,\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

Δείξτε ότι

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x,y(x))},\qquad \frac{\partial G}{\partial y}(x,y(x))\neq 0.$$

Εφαρμόστε τον τύπο για την $G(x,y)=x^2+y^3+e^{x-y}-2x+1$.

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)