



Πέμπτη 21 Μαρτίου 2019

Γ. Καραλή, Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός II

Φυλλάδιο 7

1)⊗ υπολογίστε όλες τις δεύτερες παραγώγους της συνάρτησης

$$f(x, y) = \cos \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0.$$

2)⊗ Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Υπολογίστε τις τιμές των  $f_{xy}(0, 0)$  και  $f_{yx}(0, 0)$ .

3)⊗ Περιγράψτε τις παρακάτω καμπύλες

$$\vec{\sigma}(t) = (\sin t, 3 \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\vec{\sigma}(t) = (\sin t, \cos t, t), \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Στη συνέχεια βρείτε το μήκος τους για το δεδομένο διάστημα της παραμέτρου  $t$ .

4) Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ -1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Βρείτε τη τιμή της ποσότητας  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ .

5) Έστω

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^a |y|^b}{|x| + |y|^2}.$$

Δείξτε ότι για  $(a, b) = (2/3, 4/3)$  το όριο υπάρχει ενώ για  $(a, b) = (1/3, 4, 3)$  δεν υπάρχει.

6) Διαβάστε τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν τα διαδοχικά όρια  $\lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)]$  και  $\lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)]$  υπάρχουν και είναι ίσα, τότε και το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  υπάρχει.

2. Αν  $f$  συνεχής στο  $(0, 0)$ , τότε οι μερικές παράγωγοι  $f_x(0, 0)$  και  $f_y(0, 0)$  υπάρχουν.

3. Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  και  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ , τότε  $f$  συνεχής στο  $(0, 0)$ .
4. Αν  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ , τότε οι μερικές παράγωγοι  $f_x$  και  $f_y$  υπάρχουν σε μια περιοχή που περιέχει το  $(0, 0)$  και είναι συνεχείς.
5. Αν υπάρχουν  $\frac{\partial f}{\partial x}$  και  $\frac{\partial f}{\partial y}$  σε περιοχή που περιέχει το  $(0, 0)$  και είναι συνεχείς, τότε  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ .

Ποιές από τις παραπάνω προτάσεις είναι σωστές;

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με  $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)