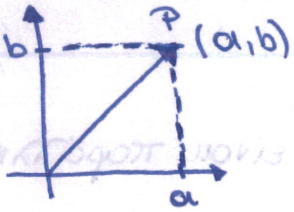
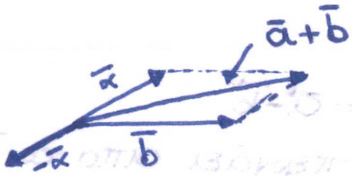
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

$\boxed{\text{Μάθημα } 1^{ο}}$ 5 Φεβρουαρίου 2019.

Διανύσματα



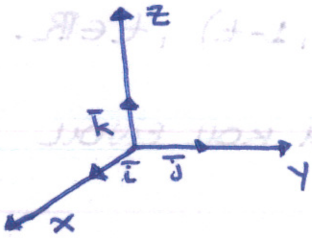
$\mathbb{R}^2$



$\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \bar{\alpha}$

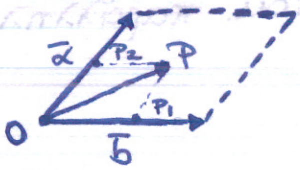
- $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$



$\bar{\alpha} + \bar{b} = (\alpha_1 + b_1, \alpha_2 + b_2, \alpha_3 + b_3)$.

Παράδειγμα 1

→ Περιγράψτε τα σημεία εντός του παρ/μου με πλευρές τα δ/τα $\bar{\alpha}, \bar{b}$.

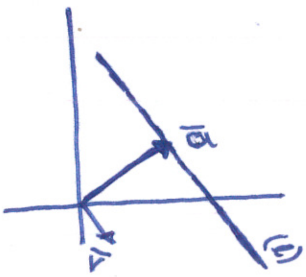


- $\vec{OP} = \vec{OP_1} + \vec{OP_2}$

$= t\vec{b} + s\vec{\alpha}$, $0 \leq t, s \leq 1$

Παράδειγμα 2

Εξίσωση ευθείας που περνάει από το $\vec{\alpha}$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v}$.



- $\ell(t) = \bar{\alpha} + t\bar{v}$, $t \in \mathbb{R}$.

$= (\alpha_1, \alpha_2) + t(v_1, v_2) = (\alpha_1 + tv_1, \alpha_2 + tv_2)$.

Παράδειγμα 3

$\vec{i} = (1,0,0)$

$\vec{j} = (0,1,0)$

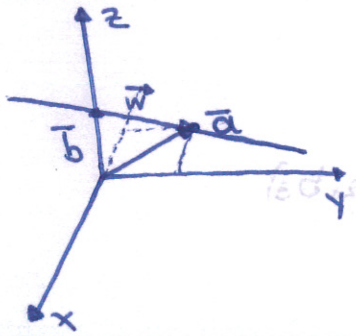
$\vec{k} = (0,0,1)$

Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $(0,1,0)$ στην κατεύθυνση $\vec{i}$

- $\ell(t) = (0,1,0) + t(1,0,0) = (t,1,0)$.

Παράδειγμα 4

Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία $\underbrace{(-1,1,0)}_{=\bar{\alpha}}$ και $\underbrace{(0,0,1)}_{=\bar{b}}$



$\bar{b}+\vec{w}=\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{w}=\vec{\alpha}-\vec{b}$.

∴ Άρα η ευθεία περνάει απο το $\bar{b}$ και είναι παράλληλη στο $\vec{w}$:

$\ell(t)=\bar{b}+t(\bar{\alpha}-\bar{b})$, $t\in\mathbb{R}$.

$\ell(t)=(0,0,1)+t(-1,1,-1)=(-t,t,1-t)$, $t\in\mathbb{R}$.

• Με την ίδια λογική η ευθεία περνάει απο το $\bar{\alpha}$ και είναι παράλληλη στο $\bar{b}-\bar{\alpha}$: $\ell(t)=\bar{\alpha}+t(\bar{b}-\alpha)$

$=(-1,1,0)+t(1,-1,1)$

$=(-1+t,1-t,t)$, $t\in\mathbb{R}$

Παρατήρηση: Η παραμετρική απεικόνιση <u>δεν</u> είναι μοναδική.

Παράδειγμα 5

Εξίσωση επιπέδου που περνάει απο το $\bar{\alpha}$ και είναι παράλληλο στα διανύσματα $\bar{b}$ και $\bar{c}$

$P(t,s)=\vec{\alpha}+t\vec{b}+s\vec{c}$, $s,t\in\mathbb{R}$

Εσωτερικό Γινόμενο.

$\bar{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\mathbb{R}^3$

$\bar{\alpha}\cdot\bar{b}=\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3$.

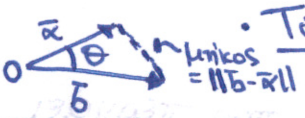
→ $\bar{\alpha}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{\alpha}\cdot\bar{b}+\bar{\alpha}\cdot\bar{c}$

→ $\|\bar{\alpha}\|=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)^{1/2}$

→ $\bar{\alpha}\cdot\bar{\alpha}=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=\|\bar{\alpha}\|^2$ $\quad(\|\bar{\alpha}\|=(\bar{\alpha}\cdot\bar{\alpha})^{1/2})$

Θεώρημα

• $\bar{\alpha},\bar{b}\in\mathbb{R}^2$, $0\leq\theta\leq\pi$.



• Τότε: $\bar{\alpha}\cdot\bar{b}=\|\bar{\alpha}\|\cdot\|\bar{b}\|\cdot\cos\theta$.

Απόδειξη: Εφαρμ. Ν. Συνημιτόνων: $\|\bar{b}-\bar{\alpha}\|^2=\|\alpha\|^2+\|b\|^2-2\|\bar{\alpha}\|\|\bar{b}\|\cos\theta$. (1)

• $(\bar{b}-\bar{\alpha})\cdot(\bar{b}-\bar{\alpha})=\bar{b}\cdot(\bar{b}-\bar{\alpha})-\bar{\alpha}(\bar{b}\cdot\bar{\alpha})=\bar{b}\cdot\bar{b}-\bar{b}\cdot\bar{\alpha}-\bar{\alpha}\cdot\bar{b}+\bar{\alpha}\cdot\bar{\alpha}$

$=\|\bar{b}\|^2-2\bar{\alpha}\cdot\bar{b}+\|\bar{\alpha}\|^2$ (2)

(1) = (2) $\Rightarrow 2\bar{\alpha}\cdot\bar{b}=2\cos\theta\|\bar{\alpha}\|\|\bar{b}\|$

$\Rightarrow \boxed{\bar{\alpha}\cdot\bar{b}=\|\bar{\alpha}\|\cdot\|\bar{b}\|\cdot\cos\theta}$

Πόρισμα: $\bar{a} \cdot \bar{b} \leq \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|$ → Ανισότητα Cauchy-Schwartz.

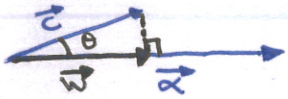
$(\bar{a} \cdot \bar{b} = \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \cdot \cos\theta \leq \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|$.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \iff \bar{a} \perp \bar{b}$

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ.

Μάθημα 2ο 7 Φεβρουαρίου 2019.

• Ορθογώνια προβολή του $\vec{c}$ στο $\vec{a}$



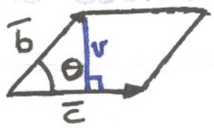
$$\|\vec{w}\| = \|\vec{c}\| \cdot \cos\theta \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \|\vec{c}\|\|\vec{a}\|\cos\theta\,\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} = \vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}$$

• Εξωτερικό Γινόμενο.

$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{i}(a_2b_3 - b_2a_3) - \bar{j}(a_1b_3 - b_1a_3) + \bar{k}(a_1b_2 - b_1a_2)$$

Ιδιότητες
- $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$
- $\bar{a}\times\bar{a} = 0$
- $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
- $\|\bar{b}\times\bar{c}\| = \|\bar{b}\|\cdot\|\bar{c}\|\cdot\sin\theta$ → εμβαδόν παρ/μου.

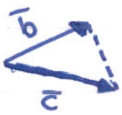


→ Παράδειγμα

• Βρείτε μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο των $\bar{a} = (0,1,0)$, $\bar{b} = (1,1,1)$

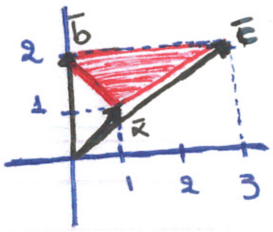
Λύση: $\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,-1)$ και μοναδιαίο $\vec{n} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$ $(\|(1,0,-1)\| = \sqrt{2})$

• Έστω $\bar{b}, \bar{c}$ δυο διανύσματα στο x,y επίπεδο.

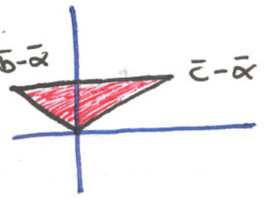


$$\boxed{\text{εμβαδόν τριγώνου} = \frac{1}{2}\|\bar{b}\times\bar{c}\|}$$

Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα $\bar{a} = (1,1)$ $\bar{b} = (0,2)$ και $\bar{c} = (3,2)$.



μετατ. $\bar{b}-\bar{a}$ $\longrightarrow$



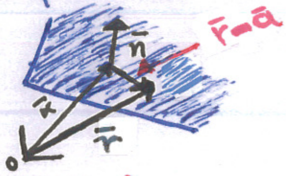
Εμβαδόν: $\frac{1}{2}\|(\bar{b}-\bar{a})\times(\bar{c}-\bar{a})\|$

$$= \frac{1}{2}\|(-1,1)\times(2,1)\| = \frac{3}{2}$$

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\bar{k}$$

Εξίσωση Επιπέδου.

Έστω επίπεδο που είναι κάθετο στο $\vec{n}$ και περνάει από το σημείο $\vec{a}$.



$\bar{n}=(A,B,C)$
$\bar{a}=(x_0,y_0,z_0)$

- Έστω $\bar{r}=(x,y,z)$ σημείο του επιπέδου
Τότε $\bar{r}-\bar{\alpha} \perp \bar{n}$
άρα $(\bar{r}-\bar{\alpha})\cdot\bar{n}=0$

$$(x-x_0,\, y-y_0,\, z-z_0)\cdot(A,B,C)=0$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Παράδειγμα

Βρείτε εξίσωση επιπέδου που περιέχει τα σημεία: $\bar{a}=(1,1,1)$
$\bar{b}=(2,0,0)$, $\bar{c}=(1,1,0)$.

Λύση: $Ax+By+Cz=D$. (1ος τρόπος)

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=D \\ 2A=D \\ A+B=D \end{array}\right| \begin{array}{l} C=0 \\ A=D/2 \\ B=D/2 \end{array} \qquad \frac{D}{2}x+\frac{D}{2}y=D \Rightarrow$$

$$\boxed{x+y-2=0}$$

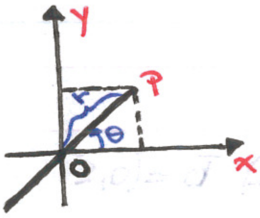
(2ος τρόπος)

Ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο είναι:

$$\vec{n}=(\bar{a}-\bar{b})\times(\bar{c}-\bar{b})$$
$$=(-1,1,1)\times(-1,1,0)$$
$$=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\bar{i}-\bar{j}=(-1,-1,0)$$

Άρα εξ. επιπέδου: $\left.\begin{array}{l} -(x-x_0)-(y-y_0)=0 \\ (x_0,y_0,z_0)=(2,0,0)=\bar{b} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{x+y-2=0}$

Πολικές Συντεταγμένες στο επίπεδο.



(r,θ), $r\geq 0$, $0\leq\theta\leq 2\pi$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ x=r\cos\theta \\ \bullet\ y=r\sin\theta. \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \bullet\ \theta=\arctan\frac{y}{x} \end{array}}$$