Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

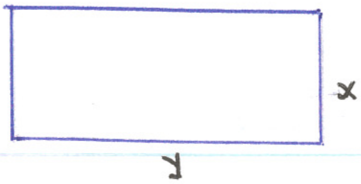
Μάθημα 18° 9 Απριλίου 2019

Ακρότατα υπό συνθήκες

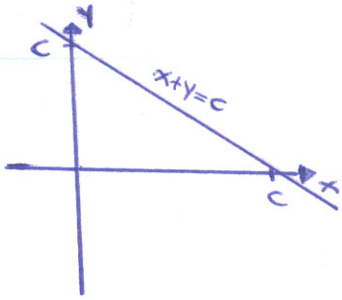
Θέλω να βρω: **π.χ.** το μέγιστο της $f(x,y)$ στα σημεία όπου $g(x,y)=c$ ή ισοδύναμα αν S είναι $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g(x,y)=c\}$ τότε αναζητώ το μέγιστο της $f|_S$ (περιορισμός της f πάνω στο S)

Παράδειγμα

Βρείτε ορθογώνιο με δοσμένη περίμετρο και μέγιστο εμβαδό.



$x+y=c$ και θέλω να βρω το μέγιστο της $f(x,y)=xy$. (εννοείται $x>0$, $y>0$)



Θεώρημα (Πολλαπλασιαστές Lagrange)

Έστω $f: U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ομαλές συναρτήσεις και $\bar{x}_0\in U$ τ.ω. $g(\bar{x}_0)=c$ και $S=\{\bar{x}\in U : g(\bar{x})=c\}$. Υποθέτω ότι $\nabla g(\bar{x}_0)\neq 0$. Αν η $f|_S$ έχει μέγιστο ή ελάχιστο στο $\bar{x}_0$ τότε: υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τ.ω.: $\boxed{\nabla f(\bar{x}_0)=\lambda\nabla g(\bar{x}_0)}$

Απόδειξη

Βήμα 1: Το $\nabla g(\bar{x}_0)$ είναι κάθετο στο εφαπτ. επίπεδο της επιφάνειας $S=g(\bar{x}_0)=c$ **Διότι:** Έστω $\vec{\sigma}(t)$ καμπύλη που ανήκει στην επιφάνεια S. τ.ω. $\vec{\sigma}(0)=\bar{x}_0$. Το εφαπτόμενο δ/μα στην $\vec{\sigma}(t)$ στο $t=0$ είναι το $\vec{\sigma}'(0)$.

$$\frac{d}{dt}g(\vec{\sigma}(t))=\frac{d}{dt}c=0$$

Από κανόνα αλυσίδας: $\frac{d}{dt}g(\bar{\sigma}(t))=\nabla g(\bar{\sigma}(t))\cdot\bar{\sigma}'(t)\Big|_{t=0}=\nabla g(\bar{x}_0)\cdot\bar{\sigma}'(0)$ και δηλ. $\nabla g(\bar{x}_0)\cdot\bar{\sigma}'(0)=0$ άρα $\nabla g(\bar{x}_0)\perp\bar{\sigma}'(0)\Rightarrow$ $\nabla g(\bar{x}_0)\perp$ στο εφ. επίπεδο της S στο x_0.

Βήμα 2: Αν η $f|_S$ έχει μέγιστο η ελάχιστο στο $\bar{x}_0$ τότε $\nabla f(\bar{x}_0)$ είναι κάθετο στο εφ. επίπεδο της S στο x_0.

Διότι: Έστω $\sigma(t)$ τυχαία καμπύλη της S και $\bar{\sigma}(0)=x_0$.
Προφανώς η $f(\bar{\sigma}(t))$ έχει μέγιστό η ελάχιστο στο $t=0$.
Αρα $t=0$ είναι κρίσιμο σημείο της $f(\bar{\sigma}(t))$. άρα:

$$\frac{d}{dt} f(\bar{\sigma}(t))\Big|_{t=0} = 0 \Longleftrightarrow \nabla f(\bar{x}_0)\cdot \bar{\sigma}'(0)=0$$

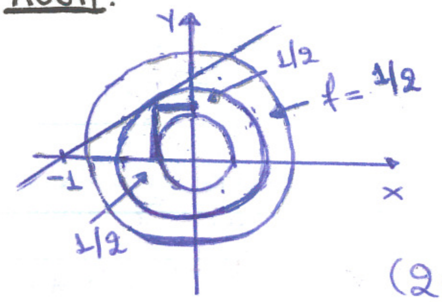
άρα $\nabla f(\bar{x}_0)$ όπως πριν είναι κάθετο στο εφ. επίπεδο της S στο x_0.

Βήμα 3: Απο Βήμα 1, Βήμα 2 τα $\nabla f(\bar{x}_0)$ και $\nabla g(\bar{x}_0)$ είναι παράλληλα διανύσματα και άρα $\underbrace{\nabla f(\bar{x}_0)=\lambda \nabla g(\bar{x}_0)}_{\substack{(n-\text{εξισώσεις}\\ \text{λόγω } n-\text{μερ. παρ.})}}$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$.

Παραδείγματα

Π1. Έστω $S\subset\mathbb{R}^2$ η ευθεία που περνάει απο το $(-1,0)$ και έχει κλίση $45°$ και $f(x,y)=x^2+y^2$. Βρείτε τα ακρότατα της $f|_S$

Λύση:



$g(x,y)=x-y=-1$

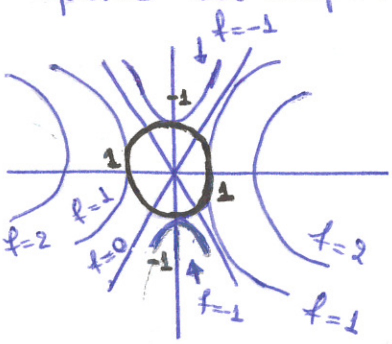
Απο Θεώρημα θα πρέπει να βρω (x_0,y_0) και λ τ.ω.

$$\left.\begin{array}{l}\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0)\\ g(x_0,y_0)=-1\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}(2x,2y)=\lambda(1,-1)\\ x-y=-1\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{l}2x=\lambda\\ 2y=-\lambda\\ \lambda/2+\lambda/2=-1\end{array}\right\}\Longrightarrow \begin{array}{l}x=-1/2\\ y=1/2\\ \lambda=-1\end{array}$$

άρα κρ. σημείο της $f|_S$ το $(1/2,1/2)$
και απο το σχήμα έχω ελάχιστο στο $(1/2,1/2)$ $f(1/2,1/2)=1/2$

Π2. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2-y^2$ και $S=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$ βρείτε τα ακρότατα της $f|_S$.



Θα το συνεχίσουμε στο επόμενο μάθημα.

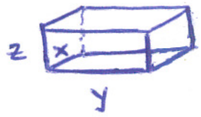
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

$\boxed{\text{Μάθημα } 19^o}$ 11 Απριλίου 2019

Παραδείγματα

Π1. Βρείτε το μέγιστο όγκο ορθογωνίου με δοσμένο εμβαδόν $10m^2$

Λύση:



$S = 2(xy + xz + yz) = 10$

$f(x,y,z) = xyz$, $g(x,y,z) = xy + xz + yz - 5 = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} yz = \lambda(y+z) & (1) \\ xz = \lambda(x+z) & (2) \\ yx = \lambda(x+y) & (3) \\ xy+yz+zx = 5 & (4)\end{array}$$

$\frac{(1)}{(2)} \Big| \frac{y}{x} = \frac{y+z}{x+z} \Rightarrow xy + yz = xy + xz$

$\Rightarrow xz = yz \Rightarrow$

$z(x-y) = 0 \xRightarrow[z>0]{} \boxed{x=y}$

$x,y,z > 0$

και $\lambda > 0$ (αλλιώς θα είχα άτοπο).

Παρόμοια θα πάρω ότι $x = y = z$ (5)

(4) $\xRightarrow[(5)]{} 3x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{3}}$ Άρα το κρ. σημείο το $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$

και είναι μέγιστο (το βλέπω διαισθητικά) άρα μέγιστος όγκος

$V_{max} = \left(\frac{5}{3}\right)^{3/2}$.

Μια 2η λύση: (χωρίς πολ/τες Lagrange)

$g(x,y) = f\left(x, y, \frac{5-xy}{x+y}\right) = xy\frac{5-xy}{x+y}$ (εδώ θα μπορούσα μέσω 2ης παραγ. να επιβεβαιώσω ότι είναι μέγιστο).

Π2. Βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$ στο $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Λύση: Ελέγχω το εσωτερ. του D: $\nabla f = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 4y = 0 \\ 2y - 4x = 0 \end{array}\right\} (x,y) = (0,0)$$

Ελέγχω το σύνορο: (πολ/τες Lagrange)

Ο περιορισμός είναι $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - 4y = 2\lambda x \\ -4x + 2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}(1-\lambda)x - 2y = 0 \\ (1-\lambda)y - 2x = 0\end{array}\right] (*) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}$$

Αν $\det\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \neq 0$ τότε $x = y = 0$ όμως $x^2 + y^2 = 0 \neq 1$ (άρα όχι δεκτή) άρα $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = 4 \Rightarrow$

$1-\lambda = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1} \xRightarrow{(*)} 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = y \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

ή ή $\rightarrow$ <u>δηλ:</u> $(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ή $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$1-\lambda = -2 \Rightarrow \boxed{\lambda = 3} \xRightarrow{(*)} -2x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\rightarrow (x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ή $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Θα συγκρίνω τις τιμές.

$f(0,0) = 0$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3$

άρα μέγιστο το 3 (σε δύο σημεία)

ελάχιστο το -1 (σε δύο σημεία).

→ Τι συμβαίνει όταν έχω 2 ή περισσότερους περιορισμούς;

$g_1(x_1, \dots, x_n) = c_1$

$g_2(x_1, \dots, x_n) = c_2$

$\vdots$

$g_k(x_1, \dots, x_n) = c_k$

και αναζητώ ακρότατα της $f(x_1, \dots, x_n)$

Τότε αναζητώ σημεία $\bar{x}_0$ και σταθ. $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ τ.ω.

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}_0) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}_0) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x}_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\bar{x}_0) \\ g_1(\bar{x}_0) = c_1 \\ \vdots \\ g_k(\bar{x}_0) = c_k \end{cases}$$

$(n+k)$ άγνωστοι και $(n+k)$ εξισώσεις.

Π3. Βρείτε τα ακρότατα της $f(x,y,z) = x+y+z$ με τους περιορισμούς:

$g_1 = x^2 + y^2 = 2$, $g_2 = x + z = 1$

$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot 1 \\ 1 = \lambda_1 2y + 0 \cdot \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ x + z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 1}, \quad \left.\begin{array}{l} \lambda_1 x = 0 \\ \lambda_1 y = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \xRightarrow{\lambda_1 \neq 0} \boxed{x = 0} \xRightarrow[x+z=1]{} \boxed{z = 1}$$

$\Downarrow$

$y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$

Άρα τα κρ. σημεία είναι : $(x,y,z)=(0,\sqrt{2},1)$
$(x,y,z)=(0,-\sqrt{2},1)$

Θα δω τις τιμές :

$f(0,\sqrt{2},1)=\sqrt{2}+1 \longrightarrow$ μέγιστο

$f(0,-\sqrt{2},1)=-\sqrt{2}+1 \longrightarrow$ ελάχιστο.

Παρατήρηση

Είχαμε δει το παράδειγμα με τα ακρότατα στον μισό μον. δίσκο.

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= x^2+y^2=1 \\ g_2 &= y=0 \end{aligned}\right\} (*)$$

Αν μου ζητηθεί να βρω τα ακρότατα στον μισό μον. δίσκο και προσπαθήσω να τα βρω με πολλαπλασιαστές Lagrange και συνθήκες (*) έχω κάνει λάθος! (Αυτό γιατί θα "χάσω" το σύνορο και θα ελέγξω ουσιαστικά 2 σημεία).