Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 24° 14 Μαΐου 2019

__Παράδειγμα__ 1 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

__Λύση:__ 1ος τρόπος : $0 \le \left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|x||x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |x| \to 0$

2ος τρόπος : $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^2\cos^2\theta}{r} = r\cos^2\theta \to 0$, ($r\to 0^+$ $\cos^2\theta$ φραγμ.).

2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

- $0 \le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \le |y| \to 0$ (1ος τρόπος)

- $\frac{x^2y}{x^2+y^2} \underset{r\to 0^+}{\overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}}{=}} \frac{r^2\cos^2\theta \cdot r\sin\theta}{r^2} = r\cos^2\theta\cdot\sin\theta \longrightarrow 0$ (2ος τρόπος)

3 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0$

1ος τρόπος : $0 \le \left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| = \frac{|x||y||z|}{x^2+y^2+z^2} \overset{(*)}{\le} \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{x^2+y^2+z^2} \longrightarrow 0$

Ξέρω ότι αν $\alpha=(x,y,z)$: $\|\alpha\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ και επίσης

$$\left.\begin{aligned} |x| &\le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ |y| &\le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ |z| &\le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow |x||y||z| \le (x^2+y^2+z^2)^{3/2} \quad (*)$$

2ος τρόπος : Σφαιρικές συντεταγμένες. $\begin{pmatrix} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{pmatrix}$

$$\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{r^3\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\cos\varphi}{r^2} = r\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\cos\varphi \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0.$$

Παράδειγμα

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x) = (x^2, 3x+5, \sin x)$

$g(y,z,w) = yz^2 + w^2 e^z$.

Τότε η σύνθεση $h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) = g(f(x)) = g(x^2, 3x+5, \sin x) = (3x+5)^2 x^2 + \sin^2 x \, e^{3x+5}$$

Παράδειγμα

$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow x - \frac{8}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ x - \frac{8}{y^2} = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x,y) = (1/2, 4)$$

μοναδικό πιθανό σημείο τοπικού ακροτάτου της f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = \frac{16}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

είναι συνεχείς.

Στο $(\frac{1}{2}, 4)$ θα εφαρμόσω το κριτήριο 2ης παραγώγου.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(1/2, 4) = 16, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(1/2,4) = \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1/2,4) = 1$$

οπότε ο Εσσιανός πίνακας στο $(1/2, 4)$ είναι:

$$\begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 1 & 1/4 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial xx} = 16 > 0$$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 16 \cdot \frac{1}{4} - 1^2 = 3 > 0$$

άρα θετικά ορισμένος κ' άρα το $(1/2, 4)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα

$f(x,y)=x^2+xy+y^2$, $x^2+y^2=1$. Βρείτε ακρότατα της f υπο τις δοθέντες συνθήκες.

Λύση: $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x+2y$. και έστω $g(x)=x^2+y^2$

$\frac{\partial g}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial g}{\partial y}=2y$ $\nabla g(x,y)=(2x,2y)$

$\nabla f(x,y)=\lambda \nabla g(x,y)$

$(2x+y,x+2y)=\lambda(2x,2y)$

$$\begin{cases} 2x+y=2x \\ 2y+x=2y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Longrightarrow \dots \quad \lambda=\frac{1}{2} \text{ ή } \lambda=\frac{3}{2}$$

4 πιθανα σημεία ακροτάτων : $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
τα ελέγχω και βρίσκω μέγιστο - ελάχιστο.

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 25° 16 Μαΐου 2019

Παράδειγμα (κανόνας αλυσίδας)

$\bar{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\bar{f}(x,y) = (x^2y,\ x+e^y,\ \sin(xy)) = (f_1, f_2, f_3)$

$g(z,w,u) = z^2w + wu^2$ $\qquad h = g\circ\bar{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial h}{\partial x} = ;$ Μπορώ να βρω $h(x,y) = g(\bar{f}(x,y)) = g(f_1,f_2,f_3)$

$h(x,y) = f_1^2 f_2 + f_2 f_3^2 = x^4y^2(x+e^y) + (x+e^y)\sin^2(xy)$

και υπολογίζω το $\frac{\partial h}{\partial x}$ εύκολα χωρίς κανόνα αλυσίδας.

Κανόνας Αλυσίδας Γενικά: Αν $h = g\circ f$ ο κανόνας αλ. δίνει:

$Dh = Dg \cdot Df$. (Για διανυσματικές f, g είναι γινόμενο πινάκων).

Στο παράδειγμα: $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x}$ (✱)

(✱) $= (2zw)(2xy) + (z^2+u^2)\cdot 1 + 2wu\cdot y\cos xy$ $\boxed{\begin{array}{l} z = f_1 = x^2y \\ w = f_2 = x+e^y \\ u = f_3 = \sin(xy)\end{array}}$

$= 2(x^2y)(x+e^y)\,2xy + (x^4y^2 + \sin^2(xy)) + 2(x+e^y)\sin(xy)\cdot y\cos(xy)$

Άσκηση Έστω $a,b,c>0$, $x,y,z\geq 0$. Βρείτε το max της

$f(x,y,z) = x^a y^b z^c$, $x+y+z=1$

Λύση: $\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow$
$$\left.\begin{array}{l} (1)\ a x^{a-1} y^b z^c = \lambda \\ (2)\ b x^a y^{b-1} z^c = \lambda \\ (3)\ c x^a y^b z^{c-1} = \lambda \\ (4)\ x+y+z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Αναζητώ $x,y,z>0$ (αν ένα είναι 0 έχω $f=0$, ελάχιστο)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{a}{b}\frac{y}{x} = 1 \\ \frac{(2)}{(3)} \Rightarrow \frac{b}{c}\frac{z}{y} = 1 \\ \frac{(1)}{(3)} \Rightarrow \frac{a}{c}\frac{z}{x} = 1 \end{array}\right\} \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} \overset{(4)}{=} \frac{1}{a+b+c}$$

$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}}$

$\Rightarrow x = \frac{a}{a+b+c},\ y = \frac{b}{a+b+c},\ z = \frac{c}{a+b+c}$

Άρα max της f είναι: $\boxed{\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}}$

Ασκηση $f(x,y)=g(u(x), v(x,y))$. Βρείτε την $f_{xy} = f_{yx}$

$$\underset{\downarrow}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} = \underset{\downarrow}{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}} \overset{(**)}{=\!=} g_{vu} \cdot u_x v_y + g_{vv} v_{yx} + g_v v_{yx}.$$

f_{yx} $\quad f_{xy}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial v}(u(x), v(x,y))\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial v}(u(x), v(x,y))\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\overset{(*)}{=\!=} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad (**)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial v}(u(x), v(x,y))\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad (*)$$

Φυλλάδιο 12

Ασκηση 2 $\quad f(x,y,z)=c$. Εφαπτόμενο επίπεδο στο (x_0, y_0, z_0):

$(E): 3x - 2y + 6z = 15$, $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \nabla f \cdot \bar{v}$ Βρείτε $\bar{v}$ τ.ω. η ποσότητα $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}$ έχει: α) μεγ. τιμή

β) ελαχ. τιμή

γ) μηδ. τιμή.

Έστω $(E) = h(x,y,z)$. $\nabla h \perp E$ άρα $(3,-2,6) \perp E$.

$\nabla h = (3,-2,6) = \bar{n}$

$\nabla f = \bar{n}$ ή $-\bar{n}$

Έστω $\nabla f = \pm\vec{n}$: μέγιστη $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}$ όταν $\bar{v} \parallel \pm\vec{n}$

ελάχιστη $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}$ όταν $\bar{v} \parallel \mp\vec{n}$

μηδενική $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}$ όταν $\bar{v} \perp \pm\vec{n}$