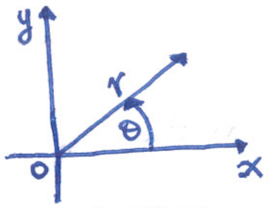
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 3º 12 Φεβρουαρίου 2019.

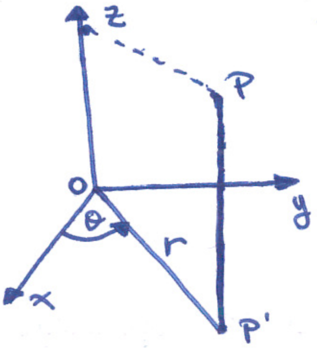
→ Πολικές συντεταγμένες. ($\mathbb{R}^2$)



Π.χ. : εξίσωση κύκλου $x^2+y^2=1$
$r=1$

$0 \le \theta < 2\pi$.

→ Κυλινδρικές συντεταγμένες ($\mathbb{R}^3$)



• (r,θ,z) $0 \le \theta \le 2\pi$

• Παράδειγμα 1

α) Αν $(x,y,z)=(6,6,8)$ βρείτε (r,θ,z)

β) Αν $(r,\theta,z)=(8,\frac{2\pi}{3},-3)$ βρείτε (x,y,z).

Λύση (α) $z=8$, $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$.

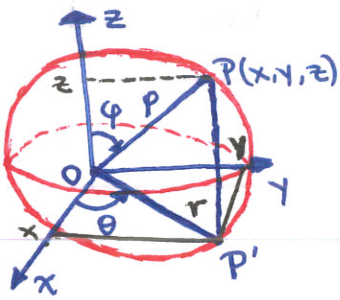
$\theta=\arctan\frac{y}{x}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$

(β) $z=-3$

$x=r\cos\theta \Rightarrow x=8\cos\frac{2\pi}{3}=8\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$

$y=r\sin\theta \Rightarrow y=8\sin\frac{2\pi}{3}=8\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$.

→ Σφαιρικές Συντεταγμένες. ($\mathbb{R}^3$)



• (ρ,θ,φ). $0 \le \theta < 2\pi$
$0 \le \varphi \le \pi$

$\boxed{r=\rho\sin\varphi}$ (1)

$x=r\cos\theta \overset{(1)}{=} \rho\sin\varphi\cos\varphi$.

$y=r\sin\theta \overset{(1)}{=} \rho\sin\varphi\sin\theta$.

$z=\rho\cos\varphi$.

$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\theta=\arctan\frac{y}{x}$

$\varphi=\arccos\frac{z}{\rho}$

Παράδειγμα 1

α) $(\rho,\theta,\varphi)=(3,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$ βρείτε (x,y,z)

β) $(x,y,z)=(2,-3,6)$ βρείτε (ρ,θ,φ).

Λύση (α) $x=\rho\sin\varphi\cos\theta=3\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$y=3\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$z=3\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(β) $\rho=\sqrt{4+9+36}=7$

$\theta=\arctan\left(-\frac{3}{2}\right)\simeq 56{,}3^\circ$

$\varphi=\arccos\left(\frac{z}{\rho}\right)=\arccos\left(\frac{6}{7}\right)\simeq 31^\circ$.

Στον $\mathbb{R}^n$.

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$
$\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$

$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.
$\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Ανισότητα Cauchy-Schwartz.

$|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$ με την ισότητα για $\bar{y} = \lambda \bar{x}$, κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ έχω $(\bar{y} - \lambda\bar{x}) \cdot (\bar{y} - \lambda\bar{x}) \geq 0$

$\Leftrightarrow \bar{y} \cdot \bar{y} - \lambda \bar{y} \cdot \bar{x} - \lambda \bar{x} \cdot \bar{y} + \lambda^2 \bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0$

$\|\bar{x}\|^2 - 2\bar{x} \cdot \bar{y} \lambda + \|\bar{y}\|^2 \geq 0$ (Το βλέπω ως τριώνυμο ως προς λ). $\forall \lambda \geq 0$.

Άρα η διακρίνουσα είναι $\Delta \leq 0$.

$\Delta = 4(\bar{x} \cdot \bar{y})^2 - 4\|x\|^2 \|\bar{y}\|^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad \|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2 \geq |\bar{x} \cdot \bar{y}|^2$ (*) ← Ανισότητα Cauchy-Schwartz.

(Για να έχω ισότητα πρέπει $\Delta = 0$ δηλ. να έχω διπλή ρίζα στο τριώνυμο).

(Με $\Delta < 0$ δηλ. χωρίς ρίζα το τριώνυμο (αδύνατη) έχω ανισότητα).

Υπάρχει $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ τ.ω. έχω ισότητα (στην (*)) άρα: $(\bar{y} - \lambda_0 \bar{x}) \cdot (\bar{y} - \lambda_0 \bar{x}) = 0$

$\Leftrightarrow \|\bar{y} - \lambda_0 \bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boxed{\bar{y} = \lambda_0 \bar{x}}$

Τριγωνική Ανισότητα • (στον $\mathbb{R}$).

$a, b \in \mathbb{R}: \big||a| - |b|\big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

• (στον $\mathbb{R}^n$).

$\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n: \big|\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\|\big| \leq \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$.

Αποδ. (Για τον $\mathbb{R}^n$).

Υψώνω στο τετράγωνο.

$\|\bar{x}\|^2 + \|y\|^2 - 2\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| \leq \underbrace{(\bar{x} + \bar{y})(\bar{x} + \bar{y})}_{(1)} \leq \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|$.

$(1) = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2\bar{x} \cdot \bar{y}$.

$-\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| \leq \bar{x} \cdot \bar{y} \leq \|\bar{x}\|\|\bar{y}\|$

$\Leftrightarrow \quad |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$.

Συναρτήσεις Πολλών μεταβλητών.

Συναρτήσεις της μορφής $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

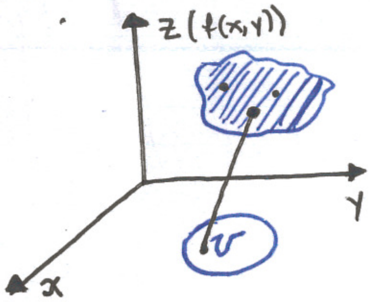
Αν $m = 1$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (πραγματ. συνάρτηση n-μεταβλητών)

$m > 1$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ δηλ. $\bar{F}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots x_n) \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ (διανυσματική συνάρτηση n-μεταβλητών).

Εν γένει: $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ U: πεδίο ορισμού της f.

Π.χ. $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (πραγμ. συνάρτηση 2 μεταβλητών).

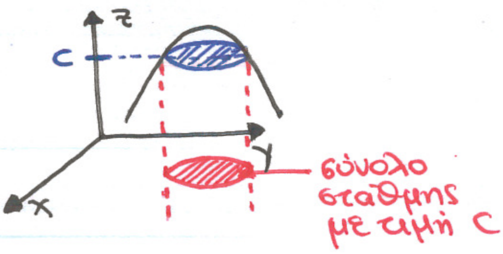
Γράφημα της f: C_f = τα σημεία $(x, y, \underbrace{f(x,y)}_{=z}) \in \mathbb{R}^2$ $z = f(x,y)$.



Ορισμός

Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Σύνολο στάθμης με τιμή c είναι τα σημεία: για τα οποία έχω: $f(x_1, \ldots, x_n) = c$.

Π.χ. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Πρόοδος: 19 Μαρτίου (Τρίτη 5-7)

$\boxed{\text{Μάθημα } 4^ο}$ 14 Φεβρουαρίου 2019.

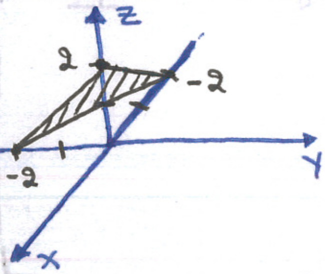
Παράδειγμα 1

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, z=f(x,y)=2$

σύνολο στάθμης $(f=c)=\begin{cases}\emptyset, & c\neq 2\\ \mathbb{R}^2, & c=2\end{cases}$

Παράδειγμα 2

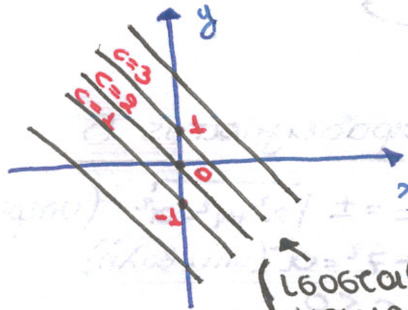
$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $z=f(x,y)=x+y+2$. $\boxed{x+y-z+2=0}$



Σύνολο στάθμης (καμπύλη στάθμης αφού είμαστε στο $\mathbb{R}^2$)

Καμπύλη στάθμης με τιμή c.

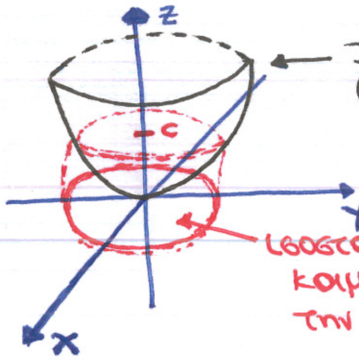
$\boxed{x+y+2=c}$ $\iff$ $y=-x+(c-2)$.



(ισοσταθμικές καμπύλες)

Παράδειγμα 3

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $z=f(x,y)=x^2+y^2$



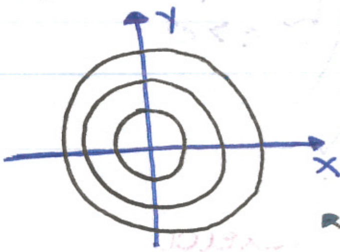
παραβολοειδές (εκ περιστροφής)

ισοσταθμική καμπύλη για την τιμή c.

· Καμπύλη στάθμης τιμή **c** $f=c$

$x^2+y^2=c$ (καμπύλη ακτίνας $\sqrt{c}$)

$(c>0)$



κύκλοι ακτίνας $\sqrt{c}$

Παράδειγμα 4

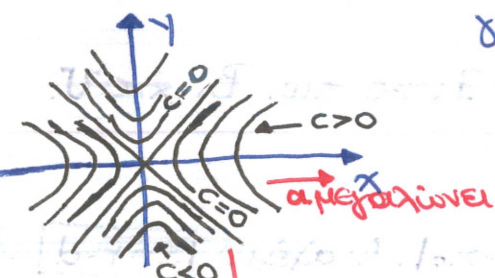
$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $z=f(x,y)=x^2-y^2$

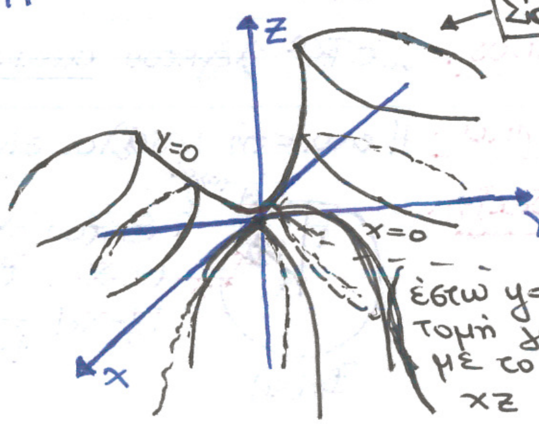
καμπύλη στάθμης: $x^2-y^2=c$

για $\underline{c=0}$: έχω $|x|=|y|$

$\underline{c=a^2}$, $a>0$

$\underline{c=-a^2}$, $a>0$





$\boxed{\text{Σχήμα}}$

(έστω $y=0$ δηλ. τομή γραφ. με το επίπεδο xz)

Παράδειγμα 5

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\ ,\ f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

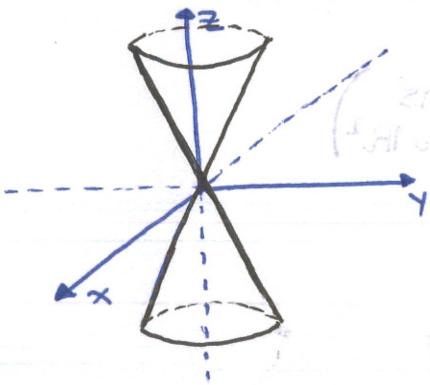
! Γράφημα είναι αδύνατο να σχεδιαστεί γιατί είναι στον $\mathbb{R}^4$.

Αναζητώ επιφάνεια στάθμης: $L_c=\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2=c\}$

$c=0$: $z^2=x^2+y^2$ (κώνος)

Τι είναι το $\boxed{z^2=x^2+y^2}$; για $y=0$ $z^2=x^2 \Leftrightarrow |z|=|x|$ (2 διαγώνιοι στο xz επ.)

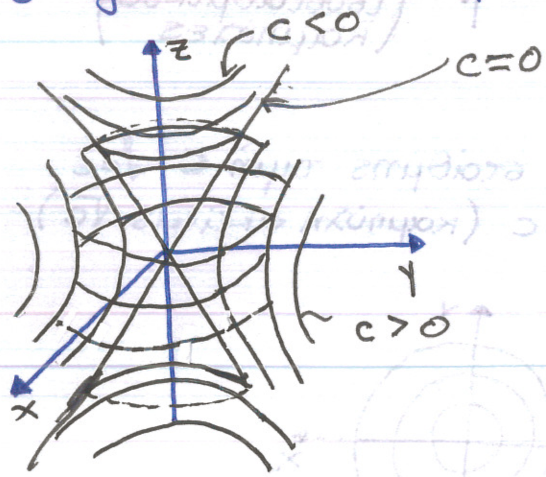
$x=0$ $y^2=z^2 \Leftrightarrow |y|=|z|$ (2 διαγώνιοι στο yz επ.)



Συνέχεια Παραδείγματος 5

$c=a^2>0$: $z=\pm\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ (υπερβολοειδές εκ περιστροφής).

για $y=0$: $x^2-z^2=a^2$ (υπερβολή)



→ Όρια και Συνέχεια

Ορισμός: Ανοικτή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$: τα x τ.ω. $\|x-x_0\|<r$

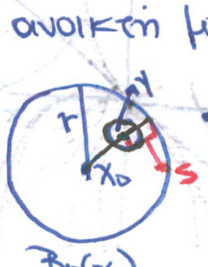
(ή ανοικτή μπάλα με κέντρο το x_0 και ακτίνα το r)

$B(x_0,r)$ ή $B_r(x_0)$

Ορισμός: $U\subset\mathbb{R}^n$ λέγεται ανοικτό σύνολο αν $\forall x\in U\ \exists r>0$ τ.ω. $B_r(x)\subset U$.

Θεώρημα: Η ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη:



• Έστω $x\in B_r(x_0)$, και $d=|x-x_0|$. Διαλέγω $\boxed{s=r-d}$

Θ.δ.ο. $B_s(x)\subset B_r(x_0)$. Έστω $y\in B_s(x)$ τυχαίο. Τότε:

$|y-x_0| \underset{\text{τρ. ανισ.}}{\Longrightarrow} |y-x_0|\le|y-x|+|x-x_0|<\underbrace{s+d}_{r}=r$

άρα $y\in B_r(x_0)$.