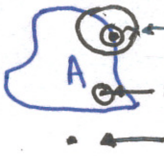
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 5ο 19 Φεβρουαρίου 2019.

Ορισμός

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, το $x \in \mathbb{R}^n$ λέγεται συνοριακό σημείο του A αν κάθε μπάλα του x περιέχει σημεία του A και σημεία εκτός του A.



← x_0: συνοριακό σημείο του A

← εσωτερικό σημείο του A

← Εξωτερικό σημείο του A.

Η ανοικτή μπάλα δεν περιέχει τα συνοριακά της σημεία $(B_r(x_0))$.

Η κλειστή μπάλα περιέχει τα συνοριακά σημεία της $(\bar{B}_r(x_0))$.

· Αν $\bar{B}_r(x_0)$ κλειστή μπάλα δηλ. $\bar{B}_r(x_0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq r\}$ και $\bar{y}$ τ.ω. $\|\bar{y} - \bar{x}_0\| = r$ τότε $\bar{y} \in \bar{B}_r(x_0)$ και $\bar{y}$ συνοριακό σημείο της $\bar{B}_r(x_0)$.

Όριο

στον $\mathbb{R}$: όταν x πλησιάζει το x_0 η $f(x)$ πλησιάζει τον αριθμό $b \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$.

Αυστηρός ορισμός

Αν $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ τ.ω. $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

Το x_0 είναι εσωτερικό ή συνοριακό σημείο του πεδίου ορισμό της f.

Στον $\mathbb{R}^m$:

Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $\bar{x}_0 \in A$ ή $\bar{x}_0$ συνοριακό σημείο του A. Τότε το $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}$ αν και μόνο αν $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ τ.ω. αν $0 < \underbrace{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|}_{\text{νόρμα στον } \mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}\|}_{\text{νόρμα στον } \mathbb{R}^m} < \varepsilon$

Παραδείγματα

1) $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$: $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{x}$ $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \bar{x} = \bar{x}_0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγω $\boxed{\delta = \varepsilon}$. Άρα αν $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \varepsilon$

(2) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} g(x,y) = x_0$

$g(x,y) = x$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγω $\boxed{\delta = \varepsilon}$. Άρα αν $\underbrace{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|}_{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^{1/2}} < \delta = \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| =$

$= ((x-x_0)^2)^{1/2} \leq \underbrace{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^{1/2}}_{= \|(x,y) - (x_0,y_0)\|} < \varepsilon$.

Ιδιότητες

(α) Αν το όριο υπάρχει είναι μοναδικό.

(β) $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \lambda \bar{f}(\bar{x}) = \lambda \bar{b}$.

(γ) Αν $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}_1$ και $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{g}(\bar{x}) = \bar{b}_2$ τότε $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} [\bar{f}(\bar{x}) \pm \bar{g}(\bar{x})] = \bar{b}_1 \pm \bar{b}_2$.

(δ) Αν f, g πραγμ. συναρτ. ($f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) και $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ τότε
$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} [f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})] = b_1 \cdot b_2$.

(ε) Αν $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $b_1 \neq 0$ τότε $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \frac{1}{f(\bar{x})} = \frac{1}{b_1}$.

Παραδείγματα

• Βρείτε το όριο, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} (x^2+y^2+xy) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} x^2 + \lim_{(x,y)\to(1,0)} y^2 + \lim_{(x,y)\to(1,0)} xy \overset{(1),(2),(3)}{=\!=\!=} 1+0+0 = 1.$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} x^2 = \Big(\underbrace{\lim_{(x,y)\to(1,0)} x}_{1}\Big)\Big(\underbrace{\lim_{(x,y)\to(1,0)} x}_{1}\Big) = 1 \cdot 1 = 1 \qquad (1)$$

από πρ. παράδειγμα

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} y^2 = \Big(\lim_{(x,y)\to(1,0)} y\Big)\Big(\lim_{(x,y)\to(1,0)} y\Big) = 0 \cdot 0 = 0. \qquad (2)$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} xy = \Big(\lim_{(x,y)\to(1,0)} x\Big)\Big(\lim_{(x,y)\to(1,0)} y\Big) = 1 \cdot 0 = 0 \qquad (3)$$

• $f(x,y,z) = \dfrac{xyz + z^3 + y^2}{x^2 + z^2 + 1}$

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)} f(x,y,z) = \frac{1+1+1}{1+1+1} = 1.$$

Ορισμός

Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $x_0 \in A$. Λέμε ότι f συνεχής στο x_0 αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Αν η f συνεχής $\forall x_0 \in A$, τότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της A.

Π.χ. • $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{x^4+1}$ τότε εύκολα βλέπουμε ότι $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{x^2+y^3}{x^4+1} = \dfrac{x_0^2+y_0^3}{x_0^4+1} = f(x_0,y_0)$ άρα η f συνεχής.

Παράδειγμα μη συνεχούς συνάρτησης: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \text{ ή } y \leq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

• Αν $x>0, y>0$ η f συνεχής

• Αν $x<0, y<0$ η f συνεχής.

Στο $(0,0)$ δεν είναι συνεχής (θα το αποδ. με ορισμό). $(f(0,0)=1)$

Πράγματι, έστω $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Αν η f ήταν συνεχής θα έπρεπε να υπάρχει $\delta > 0$ τ.ώ. αν $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y) - f(0,0)\| < \varepsilon = \frac{1}{2}$

<u>δηλ.</u> $\|(x,y)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y) - 1\| < 1/2$.

Όμως όσο μικρό και αν είναι το δ θα υπάρχουν <u>πάντα</u> σημεία (x_0, y_0) τ.ω. $x_0 > 0, y_0 > 0$ και συνεπώς $\|f(x_0,y_0) - 1\| = \|0-1\| = 1 > \frac{1}{2}$

Άρα στο σημείο $(0,0)$ η f <u>δεν</u> είναι συνεχής.

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 6ο 21 Φεβρουαρίου 2019

Για να αποδείξουμε ότι f συνάρτηση συνεχής χρησιμοποιούμε Ιδιότητες:

Θεώρημα $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $g: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}$

(1) Αν f συνεχής στο $x_0 \in A$ και η cf συνεχής στο x_0

(2) Αν, f, g συνεχής στο $x_0 \in A$ τότε $g \pm f$ συνεχής στο $x_0 \in A$.

(3) Αν $\boxed{m=1}$ δηλ. πραγματικές συναρτήσεις f, g συν. στο $x_0 \in A$ τότε $f \cdot g$ συνεχής στο x_0

(4) $\boxed{m=1}$ (f πραγμ συναρτ.) και $f(x) \neq 0$ με f συν. στο x_0 τότε $\frac{1}{f}$ συνεχής στο x_0.

(5) $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ δηλ. $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, . f συνεχής στο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $f_i(x)$ συνεχής στο x_0 $\forall\ i = 1, \dots, m$.

Παράδειγμα

$f_1(x,y) = x$ είναι συνεχής

$f_2(x,y) = y$ είναι συνεχής

$$\left.\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{Ιδιοτ.}} f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+1} \text{ συνεχής.}$$

Θεώρημα

$g: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f: B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ Υποθέτω ότι $g(A) \subset B$ ώστε η $f \circ g$ ορίζεται στο A. Αν g συνεχής στο $\bar{x}_0$ και f συνεχής στο $\bar{y}_0 = g(\bar{x}_0)$ τότε η $f \circ g$ είναι συνεχής στο $\bar{x}_0$.

Παραδείγματα

$f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $f(x) = \sin(xy)$, $f(x,y) = x^3\cos(x^2+y^2) + \ln(1+y^4+x^4)$

Είναι συνεχείς συναρτήσεις.

→ Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις όπου η εφαρμογή των ιδιοτήτων δεν είναι αρκετή και πρέπει να δουλέψουμε διαφορετικά.

Παράδειγμα (1)

$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{a \to 0} \frac{\sin a}{a} = 1$. Άρα $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ τ.ω. $|a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\sin a}{a} - 1\right| < \varepsilon$. Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω το δ υποθέτω ότι είναι μικρότερο του 1. Οπότε αν $\|\bar{x}\| < \delta$ τότε και $\|x\|^2 < \delta$ άρα $\left|\frac{\sin\|x\|^2}{\|x\|^2} - 1\right| < \varepsilon$. Συνεπώς το όριο είναι 1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$

Παράδειγμα (2) (α' τρόπος)

Ελέγξτε ως πρός την συνέχεια την $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Αν $(x,y)\neq(0,0)$ η f συνεχής στο (x,y).

Για να είναι συνεχής στο $(0,0)$ θα πρέπει: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

$$0 \leqslant \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = \|\bar{x}\|$$

$\bar{x}=(x,y)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \|\bar{x}\|=0$

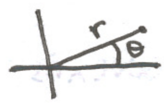
Άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ Απο κριτηριο παρεμβολής

$\quad\quad\quad\quad \| \quad$
$f(0,0)$. Άρα f συνεχής στο $(0,0)$.

(β' τρόπος)

Με χρήση πολικών συντεταγμένων.

$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$
$x^2+y^2=r^2$



$$f(x,y)=\frac{r^2\cos^2\theta}{r}=r\cos\theta$$

$(x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow \|\bar{x}\|\to 0 \Leftrightarrow r\to 0$

Άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} (r\cos^2\theta)=0=f(0,0)$ Άρα f συνεχής στο $(0,0)$.

Παράδειγμα (3)

$f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ (α τρόπος)

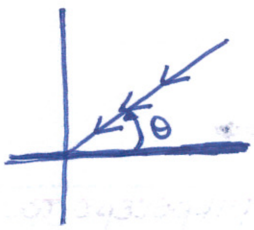
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$f(x,0)=\dfrac{1}{x}$ καθώς το $x\to 0$ <u>δεν</u> έχει όριο.

και εφόσον μια κατεύθυνση κατα μήκος της οποίας το όριο <u>δεν</u> υπάρχει τότε το όριο της συνάρτησης 2 μεταβλητών <u>δεν</u> υπάρχει.

(β τρόπος) (πολικές συντ.)

$f(x,y)=\dfrac{r\cos\theta}{r^2}=\dfrac{1}{r}\cos\theta$, για $\theta=\sigma\tau\alpha\theta.$ $\left(\neq \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$



$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{1}{r}\cos\theta = +\infty$ ή $-\infty$ άρα <u>δέν</u> υπάρχει.

Παράδειγμα (4)

$f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=?$

$f(x,0)=1$
$f(0,y)=0$

Για $y=kx$, $k\in\mathbb{R}$

$f(x,kx)=\dfrac{x^2}{x^2+k^2x^2}=\boxed{\dfrac{1}{1+k^2}}$

Εξαρτάται απο τα k!

Άρα το όριο <u>δεν</u> υπάρχει.

(β τρόπος) (πολικές συντ.) $x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$f = \dfrac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta$ δηλ. η f είναι σταθερή και ισούται με $\cos^2\theta$ κατά μήκος της ευθείας $\theta=$σταθ.

Άρα το όριο δεν υπάρχει.

Παράδειγμα (5)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\left.\begin{aligned} |x| &= \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ |y| &= \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ |z| &= \sqrt{z^2} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow |xyz| \leq (x^2+y^2+z^2)^{3/2}$$

$$0 \leq \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \xrightarrow[\|x\|\to 0]{} 0$$

Από κριτήριο παρεμβολής το $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$.