Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

$\boxed{\text{Μάθημα 16°}}$ 2 Απριλίου 2019

Μέχρι στιγμής έχουμε δει:

από Taylor: $f(x_0+h) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot h + \overbrace{\frac{1}{2}\, Hf(x_0)(h)}^{(*)} + R_2(h,x_0)$

- $Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$ → Εσσιανή συνάρτηση

$$Hf(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Εσσιανός πίνακας}$$

(*): Είχαμε πει ότι είναι το $\underbrace{h^T Hf(x_0) h}$

το $h = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$: δ/μα στήλης.

Αν x_0 κρίσιμο σημείο τότε: $\nabla f(x_0) = 0$ συνεπώς:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{\frac{1}{2} h^T Hf(x_0) h}_{} + R_2(h,x_0) \quad \text{και} \quad \frac{|R_2(h,x_0)|}{\|h\|^2} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

αυτή η τετραγ. μορφή
φαίνεται να αποφ για το πρόσημο.

(Γραμμική Άλγεβρα):

$x^T A x$ όπου A συμμετρικός πίνακας $\quad \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$, $A = \{a_{ij}\}$

η τιμή $x^T A x$ ή ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένα όταν $x^T A x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.

Κριτήριο (θετικά ορισμένος).

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος όταν:

- $a_{11} > 0$ $(= \det A_{11})$
- $\det A_{22} > 0$
- $\det A_{33} > 0$
- $\vdots$
- $\det A > 0$ $(= \det A_{nn})$

Θεώρημα

Αν $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι C^3 και $x_0 \in U$ είναι κρίσιμο σημείο:

- Αν η Εσσιανή $Hf(x_0)(h)$ είναι θετικά ορισμένη τότε x_0 σημείο τοπικού ελαχίστου της f.
- Αν η Εσσιανή $Hf(x_0)(h)$ είναι αρνητικά ορισμένη τότε x_0 σημείο τοπικού μεγίστου της f.

Βοηθητικό Λήμμα: Αν $Q(h)$ τετραγωνική μορφή (δηλ. $Q(h) = h^T A h$) είναι θετικά ορισμένη τότε: $\exists M>0$ τ.ω. $Q(h) \geq M\|h\|^2$

Απόδειξη Β. Λήμματος: $Q(h) = Q\left(\frac{h}{\|h\|}\cdot\|h\|\right) = \|h\|^2 \, Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geq M\|h\|^2$

(Μ η ελάχιστη τιμή από Θεωρ. Μεγ-Ελ. τιμής αφού μοναδιαία σφαίρα κλειστή και φραγμένη).

Απόδειξη Θεωρήματος

Τώρα έχω το Λήμμα και γράφω: $f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2} h^T Hf(x_0) h + R_2(h, x_0)$ και από Λήμμα έχω $\frac{1}{2} h^T Hf(x_0) h \geq M\|h\|^2$

και από Θ. Taylor: $\frac{|R_2(h,x_0)|}{\|h\|^2} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

και για μικρά h έχω δηλ. $\frac{|R_2(h,x_0)|}{\|h\|^2} < \frac{M}{2}$ δηλ. $R_2(h,x_0) < \frac{M}{2}\|h\|^2$

συνεπώς:

$$\frac{1}{2} h^T Hf(x_0) h + R_2(h,x_0) > M\|h^2\| - \frac{M}{2}\|h\|^2 = \frac{M}{2}\|h\|^2 \to 0$$

και δηλ. δ.ο. $f(x_0+h) - f(x_0) \geq \frac{M}{2}\|h\|^2 > 0$ $\forall h \neq 0$ και κοντά στο 0.

άρα $f(x_0+h) > f(x_0)$ και δηλ. x_0 σημείο τοπικού ελαχίστου.

• Εντελώς όμοια για x_0 σημείο τοπικού μεγίστου ($f(x_0+h) < f(x_0)$).

Παραδείγματα:

Π1 $f(x,y) = x^2+y^2$ Βρίσκω κρ. σημεία $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ να είναι 0.

Μοναδ. κρ. σημείο το $(0,0)$.

$f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$ Εσσιανή: $Hf(0,0)h = \frac{1}{2}(2h_1^2 + 2h_2^2 + 2\cdot 0 h_1 h_2)$
$= h_1^2 + h_2^2$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{bmatrix}$$

Θ. ορισμένος αν:
• $f_{xx}(0,0) > 0$ $(2>0)$
• $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ $(4>0)$

άρα είναι τοπικό ελάχιστο (μάλιστα ολικό).

Π2 Ταξινόμισε τα κρίσιμα σημεία της: $f(x+y) = x^2 - 2xy + 2y^2$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 2x - 2y = 0 \\ f_y &= 4y - 2x = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (x,y) = (0,0).$$

$f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 4$, $f_{xy} = -2$

Κρ. β' παραγώγου.:
$$\left.\begin{aligned} &\cdot f_{xx} = 2 > 0 \\ &\cdot f_{xx}f_{yy} - f_{yx}^2 = 4 > 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{Θ. ορισμένη άρα } (0,0) \text{ σημείο ελαχίστου.}$$

Αλλιώς: $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 = (x-y)^2 + y^2 \geq 0$ (άρα προφανώς $(0,0)$ ελαχ.)

Π3 (i) Έστω $f(x,y)=3x^4-4x^2y+y^2$. Δ.ο. σε κάθε ευθεία $y=mx$ η συναρτ. έχει ελαχ. στο $(0,0)$ (ii) Έχει η f ελαχ. στο $(0,0)$.

(i) Έστω $g(x)=f(x,mx)=3x^4-4mx^3+m^2x^2$

$g'(x)=12x^3-12mx^2+2m^2x$

$=x(12x^2-12mx+2m^2)$ $g'(0)=0$ και $g''(x)=36x^2-24mx+2m^2$

$g''(0)=2m^2>0$ $(m\neq 0)$ άρα ο ελάχιστο.

Για $m=0$ έχω $g(x)=3x^4$ άρα $x=0$ πάλι ελάχιστο.

(ii) $f_x=12x^3-8xy=0 \Leftrightarrow 4x(3x^2-2y)$

$f_y=-4x^2+2y=0 \Leftrightarrow y=2x^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3=0 \\ y=2x^2 \end{cases} \Rightarrow$ μοναδ. κρ. σημείο το $(0,0)$.

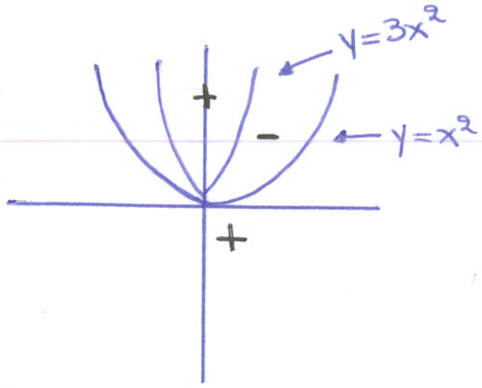
$f_{xx}=36x^2-8y$, $f_{xy}=-8x$, $f_{yy}=2$

στο $(0,0)$: $\begin{cases} f_{xx}=0 \\ f_{xy}=0 \\ f_{yy}=2 \end{cases}$ $\underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{εσσιανός στο } (0,0).}$ $f_{xx}=0$, $\det Hf(0,0)=0$ Άρα το κρ. <u>δεν</u> εφαρμόζεται.

Τι συμβαίνει κατά μήκος των παραβολών $y=kx^2$;

$f(x,kx^2)=3x^4-4kx^4+k^2x^4=x^4(3-4k+k^2)=x^4(k-1)(k-3)$

Αλλιώς: $f(x,y)=(y-3x^2)(y-x)^2$.



Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

$\boxed{\text{Μάθημα } 17^o}$ 4 Απριλίου 2019

Θεώρημα

Έστω A $n\times n$ συμμετρικός πίνακας

A_1, A_2, A_k

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A_k είναι ο $k\times k$ κύριος υποπίνακας και $\Delta_k = \det(A_k)$ η ορίζουσα του A_k, $k=1,\dots,n$

α) ο A είναι θετικά ορισμένος αν $\Delta_k>0$, $k=1,\dots,n$

β) ο A είναι αρνητικά ορισμένος αν $(-1)^k\Delta_k>0$, $k=1,\dots,n$

→ Ας δούμε αναλυτικότερα την περίπτωση $n=2$ (2 διαστάσεις). Έστω $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}$

Θεώρημα

1) Ο A είναι θετικά ορισμένος αν $a>0$ και $ac-b^2>0$

Αν $A=Hf(x_0)$ είναι ο Εσσιανός πίνακας τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

2) A αρνητικά ορισμένος αν $a<0$ και $ac-b^2>0$.

Αν $A=Hf(x_0)$ είναι ο Εσσιανός πίνακας τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

3) Αν ο A έχει μια θετική και μια αρνητική ιδιοτιμή τότε $ac-b^2<0$.

Αν $A=Hf(x_0)$ είναι ο Εσσιανός πίνακας τότε το x_0 είναι σαγματικό σημείο (ή σάγμα)

Απόδειξη

$$h^T A h = ah_1^2+2bh_1h_2+ch_2^2 = a\left(h_1+\frac{b}{a}h_2\right)+\frac{ac-b^2}{a}h_2^2 \quad (a\neq 0)$$

$h=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix}$ και διακρίνω περιπτώσεις.

1) $a>0$ και $ac-b^2>0 \Rightarrow h^TAh\geq 0$

2) $a<0$ και $ac-b^2>0 \Rightarrow h^TAh\leq 0$.

3) $a>0$ και $ac-b^2<0$ έχω υποπεριπτώσεις:

- Κατα μήκος της ευθείας $h_1+\frac{b}{a}h_2=0$ έχω δηλ. $h^TAh=\frac{ac-b^2}{a}h_2^2<0$
- Ενώ κατα μήκος της ευθείας $h_2=0$ έχω δηλ. $h^TAh=a\left(h_1+\frac{b}{a}h_2\right)^2>0$

(σαγματικό σημείο το $(0,0)$)

<u>Παραδείγματα</u>

Π1. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy$. Βρείτε και χαρακτ. τα κρίσιμα σημεία.

$$\left.\begin{array}{l} f_x=2x+y=0 \\ f_y=2y+x=0 \\ f_z=2z=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (x,y,z)=(0,0,0)$$

$f_{xx}=2 \quad f_{xy}=f_{yx}=1$

$f_{yy}=2 \quad f_{xz}=0=f_{zx}$

$f_{zz}=2 \quad f_{yz}=f_{zy}=0$

$$Hf(x_0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1=2>0$

$\Delta_2=2\cdot 2-1=3>0$

$\Delta_3=2\cdot 3=6>0$

Άρα το $(0,0,0)$ ελάχιστο (ολικό)

Π2. $f(x,y)=1-x^2$

$f_x=-2x=0$ | $(0,y)$ κρίσιμα σημεία (άπειρα)

$f_y=0$ | $y\in\mathbb{R}$.

$f_{xx}=-2$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=0$, $Hf=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ το κριτήριο δεν μας χρησιμεύει.
και παρατηρώ: $f(x,y)=1-x^2\leq 1=f(0,y)$ άρα τα $(0,y)$ είναι σημεία που f λαμβάνει μέγιστο.

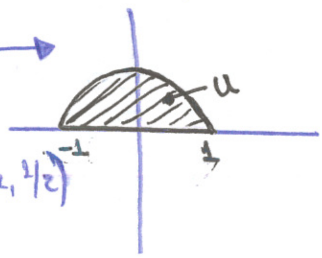
Έστω $U\subseteq\mathbb{R}^2$ ανοικτό σύνολο και θέλω να βρω ακρότατα της f στο $\overline{U}=U\cup\underbrace{\partial U}_{\text{σύνορο του } U}$. Τότε:

α) Βρίσκω κρ. σημεία στο U και τα αναγνωρίζω (μεγ. ή ελάχιστο)

β) Βρίσκω κρ. σημεία στο σύνορο ∂U (ως συνάρτηση μιας μεταβλητής) και τα αναγνωρίζω. (μέγιστο ή ελάχιστο στο ∂U)

(γ) Συγκρίνω τις τιμές της f στα σημεία που βρήκα στα (α), (β) και διαλέγω την μεγαλύτερη και μικρότερη τιμή.

<u>Παράδειγμα</u> Βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της $f(x,y)=x^2+y^2-x-y+1$ στον μισό δίσκο (μοναδιαίο) δηλ. στο $\{(x,y): x^2+y^2\leq 1,\ y\geq 0\}$ $\longrightarrow$



<u>Λύση</u>: (α) $f_x=2x-1=0$ | $\Leftrightarrow (x,y)=(1/2,1/2)$

$f_y=2y-1=0$ |

$f_{xx}=2$

$f_{yy}=2$

$f_{yx}=f_{xy}=0$

$Hf=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: $\left.\begin{array}{l}\Delta_1=2>0 \\ \Delta_2=4>0\end{array}\right\} \Longrightarrow$ τοπικό ελάχιστο. το $(1/2,1/2)$

(β)₁. $\bar{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi$

$f(\bar{\sigma}(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t - \cos t - \sin t + 1$

$= 2 - \cos t - \sin t = g(t)$ $g'(t) = \sin t - \cos t = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{4}}$

$g''(t) = \cos t + \sin t \Rightarrow g''(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} > 0$

άρα για $t = \frac{\pi}{4}$ έχω ελάχιστο άρα $(x,y) = (\cos \pi/4, \sin \pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ σημείο τοπικού ελαχίστου.

(β)₂ Ελέγχω το $\{y=0, -1 \le x \le 1\}$

$f(x,0) = x^2 - x + 1 = h(x)$, $h'(x) = 2x - 1$, άρα $x = \frac{1}{2}$

$h''(x) = 2 > 0$ άρα ελάχιστο.

(γ) Συγκρίνω τιμές:

(i) ελάχιστο: $f(1/2, 1/2) = 1/2$, $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = 2 - \sqrt{2}$, $f(1/2, 0) = \frac{3}{4}$, $f(-1,0) = 3$, $f(1,0) = 1$

Άρα ελάχιστο: στο $(1/2, 1/2)$ με τιμή $f(1/2, 1/2) = \frac{1}{2}$

(ii) μέγιστο: $f(1,0) = 1$, $f(-1,0) = 3$

Άρα μέγιστο: στο $(-1,0)$ με τιμή $f(-1,0) = 3$.